Γραμμική Άλγεβρα Ι
Εξετάσεις Ιανουαρίου 2016

Απαντήσεις

1. (α) Αφού $\det(A) = 5 \neq 0$, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την ισότητα $AX = B + C$ με A^{-1} βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}(B+C) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 11/5 & 1/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Επίσης, $\det(X) = -1$ και συνεπώς $\det(X^{25}) = (\det(X))^{25} = (-1)^{25} = -1$.

(β1) Από τη δοσμένη ισότητα παίρνουμε $4A - A^2 = 4I_n$ και συνεπώς $A \cdot (I_n - A/4) = (I_n - A/4) \cdot A = I_n$. Άρα, ο A είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο $A^{-1} = I_n - A/4$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο με $\lambda = -1/4$ και $\mu = 1$.

(β2) Έστω τώρα ότι $n = 2$ και ότι

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Από την ισότητα $A^{-1} = I_n - A/4$ παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \begin{pmatrix} 1 - a/4 & -b/4 \\ -c/4 & 1 - d/4 \end{pmatrix}$$

και συμπεραίνουμε ότι $\det(A) = 4$ (και ότι $a + d = 4$), αν ένα τουλάχιστον από τα b, c είναι διάφορο του μηδενός. Στην περίπτωση $b = c = 0$, ο πίνακας A είναι διαγώνιος και από τη δοσμένη ισότητα $A^2 = 4A - 4I_2$ βρίσκουμε ότι $A = 2I_2$, οπότε και πάλι $\det(A) = 4$.

2. (α) Υπολογίζουμε πρώτα ότι

$$\det(A) = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \lambda \\ 2 & 2 & 3 & \lambda \\ 3 & 3 & 3 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \lambda \\ 2 & 2 & 3 & \lambda \\ 3 & 3 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda - 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda - 3)$$

και συμπεραίνουμε ότι $\det(A) \neq 0$, δηλαδή ότι ο A έχει τάξη 4, αν και μόνο αν $\lambda \neq 0, 3$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

και συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{rank}(A) \geq 3$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Από τα προηγούμενα έπεται ότι $\mathrm{rank}(A) = 3$ για $\lambda = 0$ και για $\lambda = 3$ και ότι $\mathrm{rank}(A) = 4$ για τις υπόλοιπες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Βρήκαμε στο (α) ότι ο A είναι αντιστρέψιμος για $\lambda \neq 0, 3$. Κατά συνέπεια, για αυτές τις τιμές του λ το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση $x = 0$. Για $\lambda \in \{0, 3\}$, λύνοντας το σύστημα με τη γνωστή διαδικασία, βρίσκουμε το σύνολο λύσεων

$$\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

για $\lambda = 0$ και το

$$\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \\ -\mu \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

για $\lambda = 3$.

(γ) Δεν υπάρχουν τέτοιες τιμές του λ. Πράγματι, ένας πινακας $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ επαληθεύει την ισότητα $AB = O$ αν και μόνο αν οι στήλες του είναι λύσεις του συστήματος $Ax = 0$ και έχει τάξη 2 αν και μόνο αν οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^{4\times 1}$. Αφού, όπως βρήκαμε παραπάνω, ο χώρος των λύσεων του $Ax = 0$ έχει διάσταση μηδέν ή ένα, ο χώρος αυτός δεν μπορεί να περιέχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία και επομένως δεν υπάρχει πίνακας B με τις επιθυμητές ιδιότητες.

3. (α) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} U &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ x & y & -x-y \end{pmatrix} : \ a, b, x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rangle \end{aligned}$$

και ότι

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle. \end{aligned}$$

Με το γνωστό τρόπο επαληθεύουμε ότι οι τέσσερις πίνακες που βρήκαμε παραπάνω ότι παράγουν το χώρο U είναι γραμμικώς ανεξέρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^{2\times 3}$ και συνεπώς αποτελούν τα στοιχεία μιας βάσης του U. Ομοίως για τους τρεις πίνακες που παράγουν τον υπόχωρο V. Έπεται ότι $\dim(U) = 4$ και $\dim(V) = 3$ και ότι οι U και V δεν είναι ισόμορφοι (αφού έχουν διαφορετικές διαστάσεις).

(β) Βρίσκουμε ομοίως ότι

$$\begin{aligned} U \cap V &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ -a & -b & a+b \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

και ότι $\dim(U \cap V) = 2$, οπότε $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 4 + 3 - 2 = 5$.

(γ) Θεωρούμε τον υπόχωρο

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} : \ a+b+c+x+y+z = 0 \right\}$$

του $\mathbb{R}^{2\times 3}$ και παρατηρούμε ότι $U \subseteq W$ και ότι $V \subseteq W$. Έπεται ότι $U + V \subseteq W$ (και επιπλέον ότι $U + V = W$, αφού $\dim(W) = 5 = \dim(U+V)$). Συνεπώς, οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathbb{R}^{2\times 3}$ που δεν ανήκει στο W, για παράδειγμα ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

δεν ανήκει ούτε στο χώρο $U + V$.

4. (α) Λύνοντας το σύστημα $Ax = 0$, βρίσκουμε

$$\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu \\ -\lambda - \mu \\ \lambda \\ -\mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Θέτοντας

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

έχουμε τη βάση $\{v_2, v_4\}$ του πυρήνα $\ker(T)$. Επεκτείνουμε σε βάση $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ του $\mathbb{R}^{4\times 1}$, για παράδειγμα επιλέγοντας

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

σημειώνοντας ότι το σύνολο αυτό είναι πράγματι βάση του $\mathbb{R}^{4\times 1}$ αφού

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το

$$\{T(v_1), T(v_3)\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

είναι βάση της εικόνας της T.

(β) Θέτουμε

$$w_1 = T(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = T(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Επεκτείνουμε σε βάση $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ του $\mathbb{R}^{4\times 1}$, για παράδειγμα επιλέγοντας

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

σημειώνοντας ότι το σύνολο αυτό είναι πράγματι βάση του $\mathbb{R}^{4\times 1}$ αφού

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Αφού $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = 0$, $T(v_3) = w_3$ και $T(v_4) = 0$, ο πίνακας της T ως προς τις διατεταγμένες βάσεις (v_1, v_2, v_3, v_4) και (w_1, w_2, w_3, w_4) του $\mathbb{R}^{4\times 1}$ είναι ο

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως έχουμε $Q^{-1}AP = B$, όπου

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $RAP = B$, όπου

$$R = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$