Γραμμική Άλγεβρα Ι
Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2015

Απαντήσεις

1. (α) Υπολογίζουμε ότι

$$AA^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},$$

οπότε $\det(AA^t) = 10 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = 35$, ο πίνακας AA^t είναι αντιστρέψιμος και

$$(AA^t)^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/35 & -1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{pmatrix}.$$

(β) Γνωρίζουμε ότι ο A^tA είναι 3×3 πίνακας και ότι $\operatorname{rank}(A^tA) \le \operatorname{rank}(A) = 2$. Επομένως, $\det(A^tA) = 0$ και ο A^tA δεν είναι αντιστρέψιμος.

(γ) Παρατηρούμε ότι $AB = O$ αν και μόνο αν οι στήλες του πίνακα B είναι λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος $Ax = 0$. Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε τη μη μηδενική λύση $x = (-1 \;\; 5 \;\; 3)^t$ και συμπεραίνουμε ότι για τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ισχύει $AB = O$.

2. (α) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & -2 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & -3 & 7 \end{array}\right).$$

Εκτελώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών σύμφωνα με τη γνωστή διαδικασία, βρίσκουμε το γραμμοϊσοδύναμο ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ο οποίος αντιστοιχεί στο σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_4 = -1. \end{cases}$$

Οι λύσεις προκύπτουν δίνοντας αυθαίρετη τιμή $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ στις μεταβλητή x_3 και λύνοντας τις εξισώσεις ως προς τις άλλες δύο ως $x_1 = 2 + \lambda$, $x_2 = -2\lambda$ και $x_4 = -1$.

(β) Όπως βρήκαμε στο (α), οι λύσεις του συστήματος δίνονται από τον τύπο

$$x = \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \xi + \lambda u$$

για $\lambda \in \mathbb{R}$, όπου

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, τα

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi + u = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^{4\times 1}$ τα οποία είναι λύσεις του συστήματος.

(γ) Δεν υπάρχουν τέτοια στοιχεία του $\mathbb{R}^{4\times 1}$. Πράγματι, έστω τρεις τυχαίες λύσεις του συστήματος $x, y, z \in \mathbb{R}^{4\times 1}$. Θα δείξουμε ότι τα x, y, z είναι γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία του $\mathbb{R}^{4\times 1}$. Από το αποτέλεσμα του (α) έχουμε $x = \xi + \lambda u$, $y = \xi + \mu u$, $z = \xi + \nu u$ για κάποια $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, όπου τα ξ και u είναι όπως στη λύση του (β). Τότε, τα $x - y$ και $y - z$ είναι πολλαπλάσια του u και συνεπώς γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία του $\mathbb{R}^{4\times 1}$. Άρα, υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x - y = \alpha(y - z)$, ή $y - z = \alpha(x - y)$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $x - (\alpha+1)y + \alpha z = 0$ και στη δεύτερη $\alpha x - (\alpha+1)y + z = 0$. Σε κάθε περίπτωση τα x, y, z είναι γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία του $\mathbb{R}^{4\times 1}$.

3. (α) Λύνοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα $T(x) = 0$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} : x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4 \} = \{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε ότι $\dim \ker(T) = 1$. Από τη θεμελιώδη εξίσωση της διάστασης προκύπτει επίσης ότι $\dim \mathrm{im}(T) = \dim(\mathbb{R}^{4\times 1}) - \dim \ker(T) = 4 - 1 = 3$.

(β) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{im}(T) \;=\; \langle T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)\rangle \;=\; \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Παρατηρώντας ότι $T(e_1) + T(e_3) = T(e_2) + T(e_4)$, συμπεραίνουμε ότι οποιοδήποτε από τα $T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Άρα, οποιαδήποτε τρία από τα διανύσματα $T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)$ παράγουν την εικόνα $\mathrm{im}(T)$ και συνεπώς (αφού $\dim \mathrm{im}(T) = 3$) αποτελούν βάση αυτής.

Για $b = (2 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 4)^t$ βρίσκουμε ότι το γραμμικό σύστημα $T(x) = b$ έχει λύση, π.χ. τη $x = (4 \;\; -2 \;\; 5 \;\; 0)$, και συμπεραίνουμε ότι $b \in \mathrm{im}(T)$.

(γ) Προφανώς

$$\mathrm{im}(T \circ T) \;=\; \{T(T(x)) : x \in \mathbb{R}^{4\times 1}\} \;\subseteq\; \{T(x) : x \in \mathbb{R}^{4\times 1}\} \;=\; \mathrm{im}(T)$$

και συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι οι υπόχωροι $\mathrm{im}(T)$ και $\mathrm{im}(T \circ T)$ του $\mathbb{R}^{4\times 1}$ έχουν ίσες διαστάσεις, δηλαδή ότι η εικόνα $\mathrm{im}(T \circ T)$ έχει διάσταση 3. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι η διάσταση της $\mathrm{im}(T \circ T)$ είναι ίση με την τάξη του πίνακα της $T \circ T$ ως προς τυχαία βάση του $\mathbb{R}^{4\times 1}$. Υπολογίζοντας ότι

$$T(T(x)) \;=\; T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

για $x = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4)^t \in \mathbb{R}^{4\times 1}$, βρίσκουμε ότι ο πίνακας της $T \circ T$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^{4\times 1}$ είναι ο

$$B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Με τη γνωστή διαδικασία βρίσκουμε ότι ο πίνακας αυτός έχει τάξη 3 και συμπεραίνουμε ότι $\dim \mathrm{im}(T \circ T) = \mathrm{rank}(B) = 3$.

4. (α) Ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathbf{u}$ στη $\mathbf{v}$ είναι ο

$$P \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

με αντίστροφο τον

$$P^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος πίνακας είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Επίσης, αφού

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

έχουμε $S(v_1 - 3v_2 + 2v_3) = 3v_1 - v_2 - v_3$.

(β) Με τη γνωστή διαδικασία βρίσκουμε ότι οι δύο δοσμένοι πίνακες έχουν τάξεις 2 και 3, αντίστοιχα, και συμπεραίνουμε ότι δεν είναι ισοδύναμοι.

(γ) Αφού ο πίνακας του T ως προς τη βάση $\mathbf{v}$ έχει τάξη 3 (άρα είναι αντιστρέψιμος), έχουμε $\ker(T) = \{0\}$ και συνεπώς $\ker(S) + \ker(T) = \ker(S)$. Ο πυρήνας $\ker(S)$ έχει διάσταση $3 - \operatorname{rank}(S) = 3 - 2 = 1$. Λύνοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στο δοσμένο πίνακα $(S : \mathbf{u}, \mathbf{u})$ βρίσκουμε ότι $\ker(S) = \langle u_1 - u_2 + 2u_3 \rangle$, οπότε το μονοσύνολο $\{u_1 - u_2 + 2u_3\}$ αποτελεί βάση του $\ker(S)$.

(δ) Στο (β) βρήκαμε ότι ο πίνακας του μετασχηματισμού T ως προς τη βάση $\mathbf{v}$ είναι αντιστρέψιμος. Αυτό σημαίναι ότι ο T, άρα και ο T^{100}, είναι ισομορφισμός και συνεπώς $\operatorname{rank}(S \circ T^{100}) = \operatorname{rank}(S) = 2$.