Γραμμική Άλγεβρα I
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2015

1. Θεωρούμε πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

(α) Δείξτε ότι $(A+B)^2 + (A-B)^2 \,=\, 2(A^2+B^2)$.

(β) Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ και $C = (A+B)^2 + (A-B)^2$.

(β1) Δείξτε ότι ο C είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφό του.

(β2) Βρείτε όλους τους ακεραίους n για τους οποίους $C^n = I_2$.

2. Θεωρούμε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 & = & a \\ 4x_1 + x_3 & = & b \\ 3x_1 + x_2 - x_3 & = & c \end{array}\right.$$

με αγνώστους $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

(α) Για ποιες τριάδες (a,b,c) πραγματικών αριθμών είναι συμβιβαστό το σύστημα; Για ποιες από αυτές τις τριάδες έχει μοναδική λύση;

(β) Έστω W το σύνολο των $(a,b,c)^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ για τα οποία το σύστημα είναι συμβιβαστό. Δείξτε ότι το W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{3\times 1}$, υπολογίστε τη διάσταση του W και βρείτε μια βάση αυτού.

3. Δίνονται διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{R}$, διατεταγμένη βάση $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ αυτού και γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to V$ με $T(v_1 - v_2) = T(v_2 - v_3) = T(v_3 - v_4)$.

(α) Δείξτε ότι $\dim(\ker(T)) \geq 2$.

(β) Έστω ότι επιπλέον έχουμε $T(v_3) = v_2 + v_4$ και $T(v_4) = v_1 + v_3$. Υπολογίστε τη διάσταση της εικόνας του T, βρείτε τον πίνακα του T ως προς τη βάση $\mathbf{v}$ και εκφράστε το $T(T(v_1))$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης αυτής.

4. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ 2 & 1+\lambda \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(α) Για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ο πίνακας A ισοδύναμος με τον B;

(β) Για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ο πίνακας A όμοιος με τον B;

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 9/9/2015 – Καλή Επιτυχία