Γραμμική Άλγεβρα Ι
Κατατακτήριες Εξετάσεις 2011–2012

Απαντήσεις

1. (α) Εκτελούμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον επαυξημένο πίνακα $(A \mid I_4)$ με σκοπό να καταλήξουμε σε πίνακα της μορφής $(I_4 \mid B)$. Για παράδειγμα, προσθέτοντας στη δεύτερη γραμμή την πρώτη και στην τρίτη την τέταρτη, προκύπτει ο πίνακας

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ανταλλάσσοντας τη δεύτερη με την τρίτη γραμμή και πολλαπλασιάζοντας τις γραμμές αυτές με -1, προκύπτει ο πίνακας

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Τέλος, προσθέτοντας στην πρώτη γραμμή του προηγούμενου πίνακα τη δεύτερη και στην τέταρτη την τρίτη, προκύπτει ο πίνακας $(I_4 \mid B)$ με

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον B.

(β) Από την προηγούμενη διαδικασία προκύπτει ότι $\det(A) = 1$. Συνεπώς, για κάθε πίνακα $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ έχουμε $\det(ABA) = \det(A)\det(B)\det(A) = \det(B)$.

2. (α) Θέτοντας

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

βρίσκουμε ότι

$$X \in U \iff AX = O \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = O \iff \begin{pmatrix} x+z & y+w \\ x+z & y+w \end{pmatrix} = O$$

$$\iff x + z = y + w = 0,$$

οπότε
$$U \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix} : \; x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$
Από την ισότητα αυτή προκύπτει εύκολα ότι το σύνολο
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$
είναι βάση του U και συνεπώς ότι $\dim(U) = 2$. Ομοίως βρίσκουμε ότι
$$XB = O \;\Leftrightarrow\; x - y = z - w = 0, \qquad AXB = O \;\Leftrightarrow\; x - y + z - w = 0,$$
οπότε
$$V \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ z & z \end{pmatrix} : \; x, z \in \mathbb{R} \right\}, \quad W \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & x - y + z \end{pmatrix} : \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$
Από τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι τα σύνολα
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
είναι βάσεις των V και W, αντίστοιχα, και συνεπώς $\dim(V) = 2$, $\dim(W) = 3$.

(β) Προφανώς έχουμε $U \subseteq W$ και $V \subseteq W$, οπότε $U + V \subseteq W$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $\dim(U + V) = \dim(W)$, δηλαδή ότι $\dim(U + V) = 3$. Πράγματι, από τους υπολογισμούς στην απάντηση του ερωτήματος (α) προκύπτει ότι
$$U \cap V \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} : \; x \in \mathbb{R} \right\}.$$
Άρα $\dim(U \cap V) = 1$ και
$$\dim(U + V) \;=\; \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) \;=\; 2 + 2 - 1 \;=\; 3.$$

3. (α) Ο πίνακας της T ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^{1\times 3}$ είναι ο
$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
και συνεπώς η διάσταση της εικόνας της T είναι ίση με την τάξη του πίνακα αυτού. Με τη γνωστή διαδικασία βρίσκουμε ότι ένας γραμμοϊσοδύναμος του A κλιμακωτός πίνακας είναι ο
$$A' \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα η τάξη του A είναι ίση με 2, όσες είναι οι μη μηδενικές γραμμές του A'. Έπεται ότι η διάσταση της εικόνας της T είναι επίσης ίση με 2.

(β) Θα δείξουμε ότι η απάντηση είναι αρνητική. Έστω ότι υπάρχει τέτοια βάση και έστω $T(v_1) = T(v_2) = T(v_3) = w$. Γνωρίζουμε ότι κάθε διάνυσμα $v \in V$ γράφεται (με μοναδικό τρόπο) στη μορφή $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, με $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της T, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) \;=\; \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \lambda_3 T(v_3) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) w \;\in\; \langle w \rangle. \end{aligned}$$

Οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η εικόνα της T είναι ίση με το χώρο $\langle w \rangle = \{\lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$ και συνεπώς ότι η διάσταση της εικόνας αυτής είναι μικρότερη ή ίση του 1, σε αντίθεση μα την απάντηση του ερωτήματος (α). Από αυτή την αντίφαση προκύπτει το ζητούμενο.

4. (α) Προφανώς οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι και συνεπώς έχουν τάξη ίση με 2. Αφού οι A και B έχουν ίσες τάξεις, οι πίνακες αυτοί είναι ισοδύναμοι.

(β) Θα δείξουμε ότι οι A και B δεν είναι όμοιοι πίνακες. Πράγματι, ας υποθέσουμε το αντίθετο. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ τέτοιος ώστε $A = P^{-1}BP$, οπότε $PA = BP$. Θέτοντας

$$P \;=\; \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} PA \;=\; BP \;&\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x+y & x \\ z+w & z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x+z & y+w \\ z & w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο αν $x + y = x + z$, $x = y + w$, $z + w = z$ και $z = w$, σχέσεις από τις οποίες προκύπτει ότι $x = y = z = w = 0$. Συνεπώς $P = O$, σε αντίθεση με την υπόθεσή μας ότι ο P είναι αντιστρέψιμος. Από την αντίφαση αυτή συμπεραίνουμε ότι οι A και B δεν είναι όμοιοι πίνακες.