ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2008

1. Έστω διανυσματικός χώρος V πάνω στο $\mathbb{R}$ διάστασης 3. Έστω (v_1, v_2, v_3) μία βάση του V και γραμμική απεικόνιση $f : V \to V$ τέτοια ώστε $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = -2v_1 + v_2$ και $f(v_3) = -4v_2 + v_3$.

(α) Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f.

(β) Υπολογίστε το ελάχιστο πολυώνυμο της f.

(γ) Είναι η f αντιστρέψιμη; Είναι η f διαγωνίσιμη; Είναι η f τριγωνίσιμη και ως προς ποια βάση;

2. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(α) Βρείτε ορθογώνιο πίνακα Q, τέτοιον ώστε ο πίνακας $Q^{-1}AQ$ να είναι διαγώνιος.

(β) Υπολογίστε την τάξη και την υπογραφή του A.

(γ) Υπολογίστε το ίχνος του πίνακα A^{100}.

3.

(α) Βρείτε όλους τους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ για τους οποίους ισχύει $A^3 + 2A^2 - 3A = O$.

(β) Να εξετάσετε αν υπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_B(x) = x^2 + x - 8$, ο οποίος να είναι όμοιος με κάποιον από τους πίνακες A του ερωτήματος (α).

4. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος (δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας).

(α) Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας μία ιδιοτιμή του οποίου είναι ίση με 0.

(β) Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ με $A^4 = I_4$ είναι διαγωνίσιμος.

(γ) Υπάρχει συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) = x^4 - x$.

(δ) Αν το λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ και το μ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, τότε το $\lambda + \mu$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A + B$.

(ε) Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι ερμιτιανός και μοναδιαίος, τότε κάθε ιδιοτιμή του A είναι ίση με 1 ή -1.

Να απαντήσετε και στα 4 θέματα.

Να δικαιολογηθούν πλήρως οι απαντήσεις σας.

Αθήνα 17/6/2008 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία