Γραμμική Άλγεβρα Ι
Θέματα Εξετάσεων Ιανουαρίου 2016

1.

(α) Υπολογίστε τον πίνακα $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και την ορίζουσα $\det(X^{25})$, αν $AX = B + C$ και

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(β) Θεωρούμε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιον ώστε $A^2 = 4A - 4I_n$.

(β1) Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι $A^{-1} = \lambda A + \mu I_n$ για κάποια $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(β2) Αν $n = 2$, δείξτε ότι $\det(A) = 4$.

2. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \lambda \\ 2 & 2 & 3 & \lambda \\ 3 & 3 & 3 & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$ και $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

(α) Να υπολογίσετε την τάξη του πίνακα A για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Να λύσετε το γραμμικό σύστημα $Ax = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(γ) Για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ υπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ τάξης 2, τέτοιος ώστε $AB = O$;

3. Θεωρούμε τους υπόχωρους

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} : \ a + b + c = x + y + z = 0 \right\}$$

και

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} : \ a + x = b + y = c + z = 0 \right\}$$

του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{2\times 3}$.

(α) Βρείτε μια βάση του U και μια βάση του V. Είναι οι χώροι U και V ισόμορφοι;

(β) Υπολογίστε τις διαστάσεις των $U \cap V$ και $U + V$.

(γ) Δώστε παράδειγμα στοιχείου του $\mathbb{R}^{2\times 3}$ που δεν ανήκει στο $U + V$.

4. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(α) Βρείτε μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης $T : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{4\times 1}$ με $T(x) = Ax$ για $x \in \mathbb{R}^{4\times 1}$.

(β) Βρείτε αντιστρέψιμους πίνακες $P, R \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ τέτοιους ώστε

$$RAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 27/1/2016 – Καλή Επιτυχία