ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2015

Ασκήσεις

1. Για πίνακες $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ ορίζονται οι πίνακες AB και BA και ισχύει $AB = BA$. Τι συμπεραίνετε για τα m, n, p, q;

2. Για $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

(α) Δείξτε ότι $(A+B)^2 + (A-B)^2 \;=\; 2(A^2+B^2)$.

(β) Δείξτε ότι $(A+B)^2 - (A-B)^2 \;=\; 2(AB+BA)$.

(γ) Υπολογίστε τα μέλη των δύο ισότητων στα ερωτήματα (α) και (β) αν

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Δίνεται ο πίνακας $P = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

(α) Δείξτε ότι $P^2 = 9P$.

(β) Έστω ότι ισχύει $P = AB$ για κάποιους πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Δείξτε ότι για τον πίνακα $Q = BA$ ισχύει $Q^3 = 9Q^2$.

4. Δίνονται οι πίνακες

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B \;=\; \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad P \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(α) Δείξτε ότι $B = PAP$ και ότι $P^2 = I_2$.

(β) Συνάγετε ότι $B^n = PA^nP$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Υπολογίστε τον πίνακα B^n για $n \in \mathbb{N}$.

5. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

(α) Δείξτε ότι $(A - 3I_2)^2 = O$.

(β) Υπολογίστε τον πίνακα A^n για $n \in \mathbb{N}$.

6. Θεωρούμε τετραγωνικούς πίνακες A, B της ίδιας διάστασης. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

(α) Αν οι A και AB είναι διαγώνιοι πίνακες και ο A είναι μη μηδενικός, τότε ο B είναι επίσης διαγώνιος πίνακας.

(β) Αν οι A και AB είναι διαγώνιοι πίνακες και κάθε στοιχείο στην κύρια διαγώνιο του A είναι μη μηδενικό, τότε ο B είναι επίσης διαγώνιος πίνακας.

7. Δίνονται πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(α) Αν οι A και B είναι συμμετρικοί, δείξτε ότι ο $\lambda A + \mu B$ είναι συμμετρικός για όλα τα $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

(β) Αν οι πίνακες $A + B$ και $A - B$ είναι συμμετρικοί, ισχύει υποχρεωτικά το ίδιο για τους A και B;

(γ) Δίνεται ότι οι A και B είναι συμμετρικοί. Δείξτε ότι ο AB είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $AB = BA$.

8. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Αν $A = B^t + B$ για κάποιο $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, δείξτε ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός.

(β) Αν $A = B^t B$ για κάποιο $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, δείξτε ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός.

(γ) Δώστε παράδειγμα συμμετρικού πίνακα $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ για τον οποίο δεν υπάρχει $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ τέτοιο ώστε $A = B^t B$.

9. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

(α) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντισυμμετρικοί πίνακες και $AB = BA$, τότε ο πίνακας AB είναι συμμετρικός.

(β) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι αντισυμμετρικοί πίνακες, τότε ο πίνακας AB είναι συμμετρικός.

(γ) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ είναι αντισυμμετρικοί πίνακες, τότε ο πίνακας AB είναι συμμετρικός.

10. Δίνεται ο πίνακας $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(α) Δείξτε ότι ο J είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφό του.

(β) Υπολογίστε τον πίνακα J^n για $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Βρείτε όλους τους 2×2 πίνακες που μετατίθενται με τον J.

11. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(α) Δείξτε ότι ο AB είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφό του.

(β) Δείξτε ότι $AC = O$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το (β), δείξτε ότι ο BA δεν είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

12. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(α) Υπολογίστε, αν υπάρχει, τον αντίστροφο του πίνακα ABC.

(β) Βρείτε όλους τους πίνακες $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ για τους οποίους $AXB = C$.

13. Δείξτε ότι ο αντίστροφος οποιουδήποτε συμμετρικού αντιστρέψιμου πίνακα είναι επίσης συμμετρικός πίνακας.

14. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

(α) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε το ίδιο ισχύει για τον πίνακα $A^2 + B^2$.

(β) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι αντιστρέψιμοι άνω τριγωνικοί πίνακες, τότε το ίδιο ισχύει για τον πίνακα $A^2 + B^2$.

15. Δείξτε ότι για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ υπάρχουν το πολύ δύο τιμές του $\lambda \in \mathbb{C}$ για τις οποίες ο πίνακας $A + \lambda I_2$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

16. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Έστω ότι υπάρχουν πίνακες $B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $AB = CA = I_n$. Δείξτε ότι $B = C$ και ότι ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι αν ο A^2 είναι αντιστρέψιμος πίνακας, τότε ο A είναι επίσης αντιστρέψιμος πίνακας.

17. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ 17 & 19 & 21 & 23 \\ 25 & 27 & 29 & 31 \end{pmatrix}$.

(α) Βρείτε ένα γραμμοϊσοδύναμο με τον A, ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

(β) Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας στο (α), βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος των γραμμικών εξισώσεων

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = & 7 \\ 9x_1 + 11x_2 + 13x_3 & = & 15 \\ 17x_1 + 19x_2 + 21x_3 & = & 23 \\ 25x_1 + 27x_2 + 29x_3 & = & 31. \end{array} \right.$$

18. Λύστε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + \alpha x_2 + x_3 + \alpha x_4 & = & 1 \\ x_1 + \alpha x_2 - x_3 - \alpha x_4 & = & -1 \\ \alpha x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$.

19. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 \ + \ x_2 \ + \ x_3 & = & 1 \\ x_1 \ + \ \alpha x_2 \ + \ \alpha^2 x_3 & = & \beta \\ x_1 \ + \ \alpha^2 x_2 \ + \ \alpha^4 x_3 & = & \beta^2 \end{array} \right.$$

στους αγνώστους x_1, x_2, x_3, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι παράμετροι.

(α) Βρείτε όλα τα $\alpha \in \mathbb{R}$ για τα οποία το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$.

(β) Βρείτε όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία το σύστημα είναι αδύνατο.

(γ) Βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος για $\alpha = 2$ και τυχαίο $\beta \in \mathbb{R}$.

20. Γράψτε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων της μορφής

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

(α) Ένας πίνακας $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν πίνακα $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ αν και μόνο αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{F}^{m \times m}$ τέτοιος ώστε $B = PA$.

(β) Αν $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και υπάρχει $b \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ για το οποίο το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση, τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

(γ) Αν $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και ο πίνακας AB είναι αντιστρέψιμος, τότε οι A, B είναι και οι δύο αντιστρέψιμοι πίνακες.

22. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(α) Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφό του.

(β) Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας στο (α), λύστε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ για $b = (1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 2)^t$.

23. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & 7 & 2 \\ -3 & 7 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

(α) Υπολογίστε την ορίζουσα του A.

(β) Υπολογίστε την ορίζουσα του A^n για $n \in \mathbb{N}$.

24. Βρείτε όλους τους ακεραίους n για τους οποίους $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^n = I_3$.

25. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

(α) Υπολογίστε τον πίνακα AA^t και την ορίζουσα αυτού.

(β) Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας στο (α), δείξτε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν τουλάχιστον ένας από τους πραγματικούς αριθμούς a, b, c, d είναι διάφορος του μηδενός.

26. Υπολογίστε τις ορίζουσες

$$(\alpha)\ \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (\beta)\ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

27. Υπολογίστε τις ορίζουσες των πινάκων

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ldots$$

28. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

(α) Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ισχύει $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$.

(β) Αν τα στοιχεία του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, τότε $\det(A) \geq 0$.

(γ) Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ισχύει $\det(A^tA) \geq 0$.

29. Δίνεται αντισυμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(α) Αν ο n είναι περιττός αριθμός, δείξτε ότι $\det(A) = 0$

(β) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της ορίζουσας του A, αν $n = 2$;

30. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

(α) Δείξτε ότι $\det(A^tA) = (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2$.

(β) Συνάγετε ότι για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ ισχύει $\det(A^tA) \geq 0$.

(γ) Δείξτε γενικότερα ότι ισχύει $\det(A^tA) \geq 0$ για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times 2}$.

31. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με $A^2 = 2I_4$.

(α) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της ορίζουσας του A;

(β) Δείξτε ότι για τον προσαρτημένο πίνακα του A ισχύει $\operatorname{adj}(A) = \pm 2A$.

32. Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 2$ και κάθε $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ η ορίζουσα του προσαρτημένου πίνακα του A είναι ίση με $(\det(A))^{n-1}$.

33. Έστω αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι αν κάθε γραμμή του A έχει άθροισμα στοιχείων ίσο με 1, τότε το ίδιο ισχύει και για τον πίνακα A^{-1}:

(α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο που εκφράζει τον A^{-1} μέσω του προσαρτημένου πίνακα και της ορίζουσας του A.

(β) Χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$ για κατάλληλους πίνακες X, Y.

34. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν για όλους τους πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$;

(α) $\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

(β) $\operatorname{rank}(PA) = \operatorname{rank}(A)$ για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{F}^{m\times m}$.

(γ) $\operatorname{rank}(AQ) = \operatorname{rank}(A)$ για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(δ) $\operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank}(A)$ για όλους τους αντιστρέψιμους πίνακες $P \in \mathbb{F}^{m\times m}$ και $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

35. Για τυχαίους πίνακες $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{F}^{n\times p}$ δείξτε ότι:

(α) $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(A)$.

(β) $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(B)$.

36. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 8 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & 7 & -3 \\ -4 & -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(α) Υπολογίστε την τάξη των A και B.

(β) Δείξτε ότι δεν υπάρχουν πίνακες $P, Q \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ τέτοιοι ώστε $PAQ = B$.

37. Θεωρούμε τις στήλες $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(α) Ποια είναι η γραμμική θήκη των v_1, v_2, v_3, v_4;

(β) Βρείτε όλες τις τετράδες $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ πραγματικών αριθμών για τις οποίες $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$.

(γ) Είναι τα v_1, v_2, v_3, v_4 γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^{3\times 1}$;

38. Δίνονται στοιχεία $u_1, u_2, \ldots, u_p$ και $v_1, v_2, \ldots, v_q$ του $\mathbb{F}^{n\times 1}$.

(α) Δείξτε ότι $\langle u_1, u_2, \ldots, u_p \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, \ldots, v_q \rangle$ αν και μόνο αν $u_i \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_q \rangle$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

(β) Να εξετάσετε αν

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

39. Για ποιους θετικούς ακεραίους m, n ισχύει καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις;

(α) Αν οι στήλες ενός πίνακα $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ παράγουν τον $\mathbb{F}^{m\times 1}$, τότε οι στήλες του A^t παράγουν τον $\mathbb{F}^{n\times 1}$.

(β) Αν οι στήλες ενός πίνακα $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{F}^{m\times 1}$, τότε οι στήλες του A^t είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{F}^{n\times 1}$.

(γ) Αν οι στήλες ενός πίνακα $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ παράγουν τον $\mathbb{F}^{m\times 1}$, τότε οι στήλες του A^t είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{F}^{n\times 1}$.

40. Δίνονται τα διανύσματα $v_0, v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{F}^{n\times 1}$. Αν οποιαδήποτε n από αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δείξτε ότι:

(α) Υπάρχουν $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, τέτοια ώστε $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$.

(β) Αν $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ και $\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n = 0$ για κάποια $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{F}$ και οι συντελεστές μ_i δεν είναι όλοι ίσοι με μηδέν, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $\lambda_i = c\mu_i$ για $0 \leq i \leq n$.

41. Ποια από τα σύνολα

$$\begin{aligned} U &= \{(x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4)^t \in \mathbb{R}^{4\times 1}:\ x_3 = 0\}, \\ V &= \{(x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4)^t \in \mathbb{R}^{4\times 1}:\ x_1 x_2 = x_3 x_4\} \\ W &= \{(x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4)^t \in \mathbb{R}^{4\times 1}:\ x_1 x_2 \geq 0\} \end{aligned}$$

είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^{4\times 1}$;

42. Δίνεται το σύνολο $W = \{(x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4)^t \in \mathbb{R}^{4\times 1}:\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

(α) Δείξτε ότι το W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{4\times 1}$.

(β) Βρείτε τρία στοιχεία του W που παράγουν το χώρο αυτό. Αποτελούν τα στοιχεία αυτά βάση του W;

43. Δίνεται ο υπόχωρος

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

του $\mathbb{R}^{5\times 1}$.

(α) Βρείτε μια βάση $\mathcal{B}$ του W.

(β) Βρείτε μια βάση του $\mathbb{R}^{5\times 1}$ που περιέχει τη $\mathcal{B}$.

44. Δίνεται βάση $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ του χώρου $\mathbb{F}^{n\times 1}$.

(α) Αν $n = 3$, δείξτε ότι το $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ είναι βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$.

(β) Αν $n = 4$, δείξτε ότι το $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4 + v_1\}$ δεν είναι βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$.

(γ) Γενικότερα, δείξτε ότι το $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1\}$ είναι βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ αν και μόνο αν ο n είναι περιττός αριθμός.

45. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{3\times 5}$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία u_1, u_2 του $\mathbb{F}^{5\times 1}$ τέτοια ώστε $Au_1 = Au_2 = 0$.

(β) Έστω ότι υπάρχουν τρία γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία u_1, u_2, u_3 του $\mathbb{F}^{5\times 1}$ τέτοια ώστε $Au_1 = Au_2 = Au_3 = 0$. Τι συμπεραίνετε για τον πίνακα A;

46. Δίνονται διανυσματικός χώρος V με μηδενικό στοιχείο 0_V και $u, v \in V$.

(α) Αν $2u + v = 3u - 2v = 0_V$, δείξτε ότι $u = v = 0_V$.

(β) Γενικότερα, αν $au + bv = cu + dv = 0_V$ για κάποια $a, b, c, d \in \mathbb{F}$ με $ad - bc \neq 0$, δείξτε ότι $u = v = 0_V$.

(γ) Γενικεύστε για διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$.

47. Για τα στοιχεία u, v, w ενός διανυσματικού χώρου V ισχύει $u+v+w = 0_V$. Δείξτε ότι $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle$.

48. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

(α) Αν W είναι υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου V επί του $\mathbb{F}$ και για τα $u, v \in V$ ισχύει $u + v \in W$, τότε $u \in W$ ή $v \in W$.

(β) Αν W είναι υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου V επί του $\mathbb{F}$ και για τα $u, v \in V$ ισχύει $u + v \in W$ και $u - v \in W$, τότε $\lambda u + \mu v \in W$ για όλα τα $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$.

(γ) Για οποιαδήποτε στοιχεία u, v ενός διανυσματικού χώρου V ισχύει $\langle u\rangle = \langle v\rangle$ ή $\langle u\rangle \cap \langle v\rangle = \{0_V\}$.

49. Δίνονται πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και το σύνολο $W = \{X \in \mathbb{F}^{n\times n} : AX = XB\}$.

(α) Δείξτε ότι το W είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{F}^{n\times n}$.

(β) Έστω ότι $n = 2$ και

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε δύο στοιχεία του διανυσματικού χώρου W που παράγουν το χώρο αυτό.

50. Έστω $a \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι τα πολυώνυμα $1, t - a, (t - a)^2, \ldots, (t - a)^d$ παράγουν το χώρο $\mathbb{C}_d[t]$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του d με μιγαδικούς συντελεστές.

51. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

(α) Αν u, v, w είναι γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V, τότε $w \in \langle u, v \rangle$.

(β) Αν u, v, w είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V, τότε ο υπόχωρος $\langle u, v \rangle$ του V είναι γνήσιο υποσύνολο του $\langle u, v, w \rangle$.

(γ) Για οποιαδήποτε στοιχεία u, v, w ενός διανυσματικού χώρου V ισχύει $\langle u, v \rangle \cap \langle v, w \rangle = \langle v \rangle$.

(δ) Αν u, v, w είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V, τότε $\langle u, v \rangle \cap \langle v, w \rangle = \langle v \rangle$.

52. Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{R}^{2\times 3}$ και το υποσύνολο

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ a+2b & b+2c & d \end{pmatrix} : \ a, b, c, d, \in \mathbb{R} \right\}$$

αυτού.

(α) Δείξτε ότι το W είναι υπόχωρος του V.

(β) Υπολογίστε τη διάσταση του W.

53. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και το σύνολο $W = \{X \in \mathbb{F}^{n\times n} : AX^t = -XA\}$.

(α) Δείξτε ότι το W είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{F}^{n\times n}$.

(β) Υπολογίστε τη διάσταση του W, αν $n = 2$ και $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

54. Δίνονται διαφορετικοί ανά δύο πραγματικοί αριθμοί a, b, c και τα στοιχεία

$$\varphi_1(t) = (t-a)^2, \quad \varphi_2(t) = (t-b)^2, \quad \varphi_3(t) = (t-c)^2$$

του χώρου $\mathbb{R}_2[t]$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του 2 με πραγματικούς συντελεστές.

(α) Δείξτε ότι το $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}_2[t]$.

(β) Έστω ότι $a = 1, b = 0, c = -1$. Εκφράστε το $\varphi(t) = t^2 + t + 1$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$.

55. Δίνεται διανυσματικός χώρος V διάστασης $n \geq 3$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

(α) Αν U_1, U_2 είναι διακεκριμένοι υπόχωροι του V διάστασης $n-1$ και W είναι υπόχωρος του V με $W \subseteq U_1 \cap U_2$, τότε $\dim(W) \leq n-2$.

(β) Αν U_1, U_2 είναι διακεκριμένοι υπόχωροι του V διάστασης $n-1$ και W είναι υπόχωρος του V με $U_1 \subseteq W$ και $U_2 \subseteq W$, τότε $W = V$.

(γ) Αν U_1, U_2, U_3 είναι διαφορετικοί ανά δύο υπόχωροι του V διάστασης $n-1$ και W είναι υπόχωρος του V με $W \subseteq U_1 \cap U_2 \cap U_3$, τότε $\dim(W) \leq n-3$.

56. Δίνονται οι υπόχωροι

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \quad W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

του διανυσματικού χώρου $V = \mathbb{R}^{4\times 1}$.

(α) Υπολογίστε τη διάσταση του $U+W$. Αληθεύει ότι $V = U+W$;

(β) Υπολογίστε τη διάσταση της τομής $U \cap W$. Είναι το άθροισμα $U+W$ ευθύ;

57. Δίνεται βάση $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ενός διανυσματικού χώρου V διάστασης n. Δείξτε ότι $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \oplus \langle v_{k+1}, \ldots, v_n \rangle$ για $0 \leq k \leq n$.

58. Δίνεται ο διανυσματικός χώρος $V = \mathbb{R}_5[t]$ των πολυωνύμων (στη μεταβλητή t) βαθμού το πολύ 5 με συντελεστές από το $\mathbb{R}$ και τα υποσύνολά του $U = \{p(t) \in V : p(-t) = p(t)\}$ και $W = \{p(t) \in V : p(-t) = -p(t)\}$.

(α) Δείξτε ότι οι U και W είναι υπόχωροι του V.

(β) Δείξτε ότι $V = U \oplus W$.

59. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και η απεικόνιση $T : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}$ με $T(X) = AX - XA$ για $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Δείξτε ότι η T είναι γραμμικός μετασχηματισμός του V.

(β) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός T δεν είναι ισομορφισμός.

60. Δίνεται διανυσματικός χώρος V διάστασης 3, μια βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ του V και γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to V$ με $T(v_1 + v_2) = v_3$, $T(v_1 + v_3) = v_2$ και $T(v_2 + v_3) = v_1$.

(α) Υπολογίστε τα $T(v_1), T(v_2)$ και $T(v_3)$.

(β) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός T είναι ισομορφισμός.

61. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

(α) Αν $T : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση διανυσματικών χώρων και $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του V, τότε τα $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του W.

(β) Αν $T : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση διανυσματικών χώρων, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ και τα $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του W, τότε τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του V.

62. Δίνεται γραμμική απεικόνιση διανυσματικών χώρων $T : V \to W$ και υπόχωρος U του V. Θέτουμε $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$.

(α) Δείξτε ότι το $T(U)$ είναι υπόχωρος του W.

(β) Αν ο U έχει πεπερασμένη διάσταση, δείξτε ότι ο $T(U)$ έχει επίσης πεπερασμένη διάσταση και ότι ισχύει $\dim(T(U)) \le \dim(U)$.

63. Δίνεται ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{F}_d[t]$ των πολυωνύμων (στη μεταβλητή t) βαθμού το πολύ d με συντελεστές από το $\mathbb{F}$ και η απεικόνιση $T : \mathbb{F}_d[t] \to \mathbb{F}_d[t]$ με $T(p(t)) = p(t) + p'(t)$ για $p(t) \in \mathbb{F}_d[t]$.

(α) Δείξτε ότι η T είναι γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{F}_d[t]$.

(β) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός T είναι ισομορφισμός.

64. Βρείτε διανυσματικό χώρο V και γραμμικούς μετασχηματισμούς $S, T : V \to V$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) ο S είναι μονομορφισμός αλλά όχι επιμορφισμός,

(β) ο T είναι επιμορφισμός αλλά όχι μονομορφισμός.

65. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ με

$$T(x) \;=\; \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & x_2 + x_3 - x_4 - x_1 \\ x_3 + x_4 - x_1 - x_2 & x_4 + x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

για $x = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4)^t \in \mathbb{R}^{4\times 1}$.

(α) Υπολογίστε τον πυρήνα $\ker(T)$ και την εικόνα $\mathrm{Im}\,(T)$ της T.

(β) Υπολογίστε τις διαστάσεις των $\ker(T)$ και $\mathrm{Im}\,(T)$.

66. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^{4\times 1}$ με

$$T(p(t)) \;=\; \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{pmatrix}$$

για $p(t) \in \mathbb{R}_2[t]$.

(α) Δείξτε ότι η T είναι μονομορφισμός διανυσματικών χώρων. Ποια είναι η διάσταση της εικόνας $\mathrm{Im}\,(T)$ της T;

(β) Δείξτε ότι

$$\mathrm{Im}\,(T) \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} : \; y_1 - 3y_2 + 3y_3 - y_4 \;=\; 0 \right\}.$$

(γ) Για ποια $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ υπάρχει πολυώνυμο $p(t)$ βαθμού μικρότερου του 3 με πραγματικούς συντελεστές, τέτοιο ώστε $p(0) = a$, $p(1) = b$, $p(2) = c$ και $p(3) = d$;

67. Δίνονται διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης V και W με $\dim(V) = n$ και υπόχωρος U του V με $\dim(U) = k$.

(α) Αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$ τέτοια ώστε $\ker(T) = U$, δείξτε ότι $\dim(W) \geq n - k$.

(β) Αν $\dim(W) \geq n - k$, δείξτε ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$ τέτοια ώστε $\ker(T) = U$.

68. Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{R}_3[t]$ των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3 με συντελεστές από το $\mathbb{R}$ και το γραμμικό μετασχηματισμό $T : V \to V$ με $T(p(t)) = p(t) + p'(t)$, για $p(t) \in V$.

(α) Υπολογίστε τον πίνακα A του T ως προς τη διατεταγμένη βάση $(1, t, t^2, t^3)$ του χώρου V.

(β) Λύστε το γραμμικό σύστημα $Ax = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^t$.

(γ) Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας στο (β), βρείτε πολυώνυμο $p(t) \in V$ τέτοιο ώστε $p(t) + p'(t) = 1 + t + t^2 + t^3$.

69. Δίνεται διανυσματικός χώρος V διάστασης $n \geq 2$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

(α) Αν $T : V \to V$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος δεν είναι ισομορφισμός, τότε ο πίνακας του T ως προς οποιαδήποτε διατεταγμένη βάση του V έχει τουλάχιστον μία μηδενική στήλη.

(β) Αν $T : V \to V$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος δεν είναι ισομορφισμός, τότε υπάρχει διατεταγμένη βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας του T έχει τουλάχιστον μία μηδενική στήλη.

(γ) Αν $T : V \to V$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος δεν είναι ισομορφισμός, τότε υπάρχει διατεταγμένη βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας του T έχει τουλάχιστον μία μηδενική γραμμή.

70. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2}$ με $T(X) = AX + XA$ για $X \in \mathbb{R}^{2\times2}$.

(α) Υπολογίστε τον πίνακα της T και εκείνον της $T^2 = T \circ T$ ως προς την κανονική διατεταγμένη βάση $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ του $\mathbb{R}^{2\times2}$.

(β) Δείξτε ότι η T είναι γραμμικός ισομορφισμός.

(γ) Βρείτε πίνακα $X \in \mathbb{R}^{2\times2}$ για τον οποίο να ισχύει $T(T(X)) = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$.

71. Δίνεται διανυσματικός χώρος V διάστασης n και βάση $\mathcal{B}$ αυτού. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της ορίζουσας του πίνακα ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ ενός γραμμικού μετασχηματισμού $T : V \to V$ για τον οποίο ισχύει $T(T(x)) = T(x)$ για κάθε $x \in V$;

72. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^{3\times1} \to \mathbb{R}^{3\times1}$ με $T(x) = Ax$ για $x \in \mathbb{R}^{3\times1}$ και τα διανύσματα

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

του $\mathbb{R}^{3\times1}$.

(α) Δείξτε ότι η τριάδα $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ είναι διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(β) Υπολογίστε τον πίνακα Δ της T ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

(γ) Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιον ώστε να ισχύει $A^n = P\Delta^n P^{-1}$ για κάθε φυσικό αριθμό n και συνάγετε έναν τύπο για τη δύναμη A^n.

73. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ και $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(α) Βρείτε αντιστρέψιμους πίνακες $P, Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ τέτοιους ώστε $Q^{-1}AP = J$.

(β) Βρείτε αντιστρέψιμους πίνακες $P, Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ τέτοιους ώστε $Q^{-1}BP = J$.

(γ) Βρείτε αντιστρέψιμους πίνακες $P, Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ τέτοιους ώστε $Q^{-1}AP = B$.

74. Δίνεται ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Δείξτε ότι:

(α) Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ είναι όμοιος προς τον C, τότε $A^2 = O$ και $A \neq O$.

(β) Αν για τον πίνακα $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ ισχύουν $A^2 = O$ και $A \neq O$, τότε ο A είναι ισοδύναμος προς τον C.

(γ) Αν για τον πίνακα $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ ισχύουν $A^2 = O$ και $A \neq O$, τότε ο A είναι όμοιος προς τον C.

(δ) Αν $A, B \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ είναι μη μηδενικοί πίνακες και ισχύει $A^2 = B^2 = O$, τότε ο A είναι όμοιος προς τον B.

75. Δίνεται ακέραιος $n \geq 2$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

(α) Αν $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και ο πίνακας A είναι όμοιος προς τον B, τότε ο πίνακας A^3 είναι όμοιος προς τον B^3.

(β) Αν $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και ο πίνακας A είναι όμοιος προς τον B, τότε ο πίνακας $A + I_n$ είναι όμοιος προς τον $B + I_n$.

(γ) Αν $A, B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και ο πίνακας A είναι όμοιος προς τον B, τότε ο πίνακας $A + C$ είναι όμοιος προς τον $B + C$.

Σύντομες Λύσεις

1. Αφού $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ και ορίζονται οι AB και BA έχουμε $n = p$ και $q = m$, οπότε $AB \in \mathbb{R}^{m\times m}$ και $BA \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Αφού $AB = BA$, έχουμε επιπλέον ότι $m = n$. Συμπεραίνουμε ότι $m = n = p = q$.

2. Για τα (α) και (β) υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \;=\; A(A+B)+B(A+B)\\ &\; A^2+AB+BA+B^2\end{aligned}$$

και ότι

$$\begin{aligned}(A-B)^2 &= (A-B)(A-B) \;=\; A(A-B)-B(A-B)\\ &\; A^2-AB-BA+B^2.\end{aligned}$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτουν οι δύο προτεινόμενες ισότητες. Για το (γ), μετά από πράξεις βρίσκουμε ότι

$$(A+B)^2+(A-B)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 6 & 22 \end{pmatrix}, \quad (A+B)^2-(A-B)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -6 & -26 \end{pmatrix}.$$

3. Για το (α) υπολογίζουμε ότι

$$P^2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 18 & -18 \\ 18 & 45 & 36 \\ -18 & 36 & 45 \end{pmatrix} = 9P.$$

Για το (β) χρησιμοποιούμε το (α) και βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}Q^3 &= (BA)\,(BA)\,(BA) \;=\; B\,(AB)\,(AB)\,A \;=\; BP^2A \;=\; 9\,BPA\\ &= 9\,B\,(AB)\,A \;=\; 9\,(BA)^2 \;=\; 9\,Q^2.\end{aligned}$$

4. Για το (α) υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}PAP &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = B.\end{aligned}$$

και ότι

$$P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Για το (β) χρησιμοποιούμε το (α) και βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} B^n &= (PAP)\,(PAP)\cdots(PAP) \;=\; (PA)\,(PP)\,A\,(PP)\cdots(PP)\,(AP) \\ &= (PA)\,A\cdots A\,(AP) \;=\; PA^nP. \end{aligned}$$

Για το (γ) συνάγουμε από το (β) ότι

$$\begin{aligned} B^n &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2^n \\ -3 & -3^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3\cdot 2^n & 2-2^{n+1} \\ 3\cdot 2^{n+1}-6 & 2^{n+2}-3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. Για το (α) υπολογίζουμε ότι

$$(A-3I_2)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Για το (β) θέτουμε $A-3I_2 = B$, οπότε $B^2 = O$ και $A = B+3I_2$. Χρησιμοποιώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις και εφαρμόζοντας επαγωγή στο n βρίσκουμε (εξηγήστε πώς) ότι $A^n = n3^{n-1}\cdot B + 3^n I_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συμπεραίνουμε ότι

$$A^n = n3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2n+3 & n \\ -4n & -2n+3 \end{pmatrix}$$

για $n \in \mathbb{N}$.

6. Σωστή είναι μόνο η πρόταση στο (β). Για το (α) θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες A και

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι (μη μηδενικοί και) διαγώνιοι, ενώ ο B δεν είναι διαγώνιος. Για το (β) θέτουμε $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ και $AB = (c_{ij})$, όπου οι πίνακες είναι $n \times n$. Αφού ο A είναι διαγώνιος, έχουμε $a_{ik} = 0$ για $k \neq i$ και συνεπώς

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{ii} b_{ij}.$$

Αφού ο AB είναι διαγώνιος, έχουμε $a_{ii} b_{ij} = c_{ij} = 0$ για $i \neq j$. Από την ισότητα αυτή και την υπόθεσή μας ότι $a_{ii} \neq 0$ για κάθε δείκτη i έπεται ότι $b_{ij} = 0$ για $i \neq j$. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας B είναι επίσης διαγώνιος.

7. Για το (α) παρατηρούμε ότι $(\lambda A+\mu B)^t=\lambda A^t+\mu B^t=\lambda A+\mu B$. Για το (β) θέτουμε $C=A+B$ και $D=A-B$, οπότε $A=(C+D)/2$ και $B=(C-D)/2$. Χρησιμοποιώντας το (α) συμπεραίνουμε ότι αν οι C,D είναι συμμετρικοί, τότε το ίδιο ισχύει και για τους A,B. Για το (γ) παρατηρούμε ότι $(AB)^t=B^tA^t=BA$ και επομένως ότι $(AB)^t=AB \Leftrightarrow BA=AB$.

8. Για το (α) παρατηρούμε ότι αν $A=B^t+B$, τότε $A^t=(B^t+B)^t=(B^t)^t+B^t=B+B^t=A$ και συνεπώς ο A είναι συμμετρικός. Ομοίως για το (β), αν $A=B^tB$, τότε $A^t=(B^tB)^t=B^t(B^t)^t=B^tB=A$. Για το (γ) θέτουμε

$$B \;=\; \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$$

με $x,y,z,w\in\mathbb{R}$ και υπολογίζουμε ότι

$$B^tB \;=\; \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x^2+y^2 & xz+yw \\ xz+yw & z^2+w^2 \end{pmatrix}.$$

Συμπεραίνουμε ότι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του B^tB είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και επομένως ότι π.χ. για το συμμετρικό πίνακα

$$A \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

δεν υπάρχει πίνακας $B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ με $B^tB=A$.

9. Το (α) είναι σωστό, αφού αν $A^t=-A$ και $B^t=-B$, τότε $(AB)^t=B^tA^t=(-B)(-A)=BA=AB$. Το (β) είναι επίσης σωστό, αφού οι αντισυμμετρικοί πίνακες $A,B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ έχουν υποχρεωτικά τη μορφή

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix},\quad B \;=\; \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

με $a,b\in\mathbb{R}$, οπότε ο $AB=(-ab)\cdot I_2$ είναι συμμετρικός πίνακας. Το (γ) είναι λάθος, αφού θέτοντας π.χ.

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

βρίσκουμε ότι

$$AB \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Υπολογίζοντας ότι

$$J^2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;=\; -I_2$$

βρίσκουμε ότι $J^{-1} = -J$ και ότι $J^4 = (-I_2)^2 = I_2$, οπότε $J^{4n} = I_2$, $J^{4n+1} = J$, $J^{4n+2} = J^2 = -I_2$ και $J^{4n+3} = J^3 = -J$ για κάθε φυσικό αριθμό n. Για το (γ), θέτοντας

$$X \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

έχουμε

$$\begin{aligned} XJ = JX \;\;&\Leftrightarrow\;\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow\;\; \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow\; a = d,\; b = -c. \end{aligned}$$

Συνεπώς οι 2×2 πίνακες που μετατίθενται με τον J είναι εκείνοι της μορφής

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

με $a, b \in \mathbb{C}$.

11. Για το (α) υπολογίζουμε ότι

$$AB \;=\; \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

οπότε $\det(AB) = 6$, και συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας AB είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο

$$(AB)^{-1} \;=\; \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Το (β) αφήνεται στον αναγνώστη. Για το (γ) υποθέτουμε ότι ο BA είναι αντιστρέψιμος. Πολλαπλασιάζοντας την ισότητα $AC = O$ του ερωτήματος (β) από αριστερά με B προκύπτει ότι $B(AC) = O$ και συνεπώς ότι $(BA)C = O$. Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία ισότητα με τον αντίστροφο του BA βρίσκουμε ότι $C = O$, το οποίο είναι προφανώς εσφαλμένο. Από αυτή την αντίφαση συμπεραίνουμε ότι ο BA δεν είναι αντιστρέψιμος.

12. Για το (α) υπολογίζουμε ότι

$$ABC = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 & -20 \\ 85 & 35 \end{pmatrix}$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$(ABC)^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 17 & 10 \end{pmatrix}.$$

Για το (β), πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και από δεξιά με τους αντίστροφους των A και B, αντίστοιχα, βρίσκουμε ότι $AXB = C \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$ και συμπεραίνουμε ότι ο μοναδικός πίνακας με τη δοσμένη ιδιότητα είναι ο

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -71 & 49 \\ -41 & 29 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

13. Έστω A ένας συμμετρικός, αντιστρέψιμος πίνακας. Από τη θεωρία γωρίζουμε ότι $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. Αφού $A^t = A$, η προηγούμενη ισότητα γράφεται $(A^{-1})^t = A^{-1}$ και δείχνει ότι ο A^{-1} είναι επίσης συμμετρικός πίνακας.

14. Το (α) είναι λάθος, όπως δείχνουν οι αντιστρέψιμοι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

για τους οποίους $A^2 + B^2 = O$. Θα δείξουμε ότι το (β) είναι σωστό. Πράγματι, αφού οι A, B είναι άνω τριγωνικοί 2×2 πίνακες, έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & y \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

για κάποιους πραγματικούς αριθμούς a, b, c, d, x, y. Αφού οι A, B είναι αντιστρέψιμοι, έχουμε επιπλέον $abcd \neq 0$. Υπολογίζοντας ότι

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & * \\ 0 & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

και παρατηρώντας ότι $a^2 + b^2 \neq 0$ και $c^2 + d^2 \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι ο $A^2 + B^2$ είναι επίσης αντιστρέψιμος πίνακας.

15. Θέτοντας

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

έχουμε

$$A + \lambda I_2 = \begin{pmatrix} a+\lambda & b \\ c & d+\lambda \end{pmatrix}.$$

Γνωρίζουμε ότι αν ο $A+\lambda I_2$ δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε $(a+\lambda)(d+\lambda)-bc=0$. Η ισότητα αυτή γράφεται ισοδύναμα ως $\lambda^2+(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$, άρα ως πολυωνυμική εξίσωση δευτέρου βαθμού στο λ. Το ζητούμενο προκύπτει αφού κάθε τέτοια εξίσωση έχει το πολύ δύο μιγαδικές ρίζες.

16. Για το (α) παρατηρούμε ότι

$$B = I_n \cdot B = (CA)\,B = C\,(AB) = C \cdot I_n = C,$$

οπότε ο A είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο $A^{-1}=B=C$. Για το (β), έστω P ο αντίστροφος του A^2, οπότε $A^2P=PA^2=I_n$. Γράφοντας τις σχέσεις αυτές ως $A(AP)=(PA)A=I_n$ και εφαρμόζοντας το (α) συμπεραίνουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι για τον αντίστροφό του ισχύει $A^{-1}=AP=PA$.

17. Για το (α) αφαιρούμε την πρώτη γραμμή του A από καθεμιά από τις υπόλοιπες. Έπειτα αφαιρούμε κατάλληλα πολλαπλάσια της δεύτερης γραμμής του πίνακα που προέκυψε από την τρίτη και τέταρτη γραμμή, ώστε να προκύψουν δύο μηδενικές γραμμές. Συνεχίζουμε πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη γραμμή με $1/8$ κλπ και βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος πίνακας είναι ο

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από την απάντηση αυτή προκύπτει ότι το γραμμικό σύστημα του ερωτήματος (β) είναι ισοδύναμο με το

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 - x_3 & = & -2 \\ x_2 + 2x_3 & = & 3. \end{array} \right.$$

Οι λύσεις προκύπτουν δίνοντας αυθαίρετες τιμές $x_3=\lambda \in \mathbb{F}$ στη μεταβλητή x_3 και λύνοντας τις εξισώσεις ως προς τις άλλες δύο ως $x_1=-2+\lambda$, $x_2=3-2\lambda$.

18. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & -1 & -\alpha & -1 \\ \alpha & 1 & \alpha & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -1 και $-\alpha$, αντίστοιχα, και προσθέτουμε στη δεύτερη και τρίτη γραμμή. Πολλαπλασιάζοντας έπειτα τη δεύτερη γραμμή με $-1/2$ προκύπτει ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1-\alpha^2 & 0 & 1-\alpha^2 & 1-\alpha \end{array}\right).$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το αν $1-\alpha^2 = 0$ ή όχι. Για $\alpha = -1$, από την τελευταία γραμμή του προηγούμενου πίνακα φαίνεται ότι το σύστημα είναι αδύνατο. Για $\alpha = 1$ ο πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

ο οποίος αντιστοιχεί στο σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_3 + x_4 & = & 1. \end{array}\right.$$

Οι λύσεις προκύπτουν δίνοντας αυθαίρετες τιμές $x_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ και $x_4 = \mu \in \mathbb{R}$ στις μεταβλητές x_2 και x_4 και λύνοντας τις εξισώσεις ως προς τις άλλες δύο ως $x_1 = -\lambda$, $x_3 = 1-\mu$. Έστω τώρα ότι $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Πολλαπλασιάζοντας την τρίτη γραμμή με $1/(1-\alpha^2)$ και εναλλάσσοντάς την με τη δεύτερη προκύπτει ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/(1+\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right),$$

με αντίστοιχο σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + \alpha x_2 + x_3 + \alpha x_4 & = & 1 \\ x_2 + x_4 & = & 1/(1+\alpha) \\ x_3 + \alpha x_4 & = & 1. \end{array}\right.$$

Οι λύσεις προκύπτουν δίνοντας αυθαίρετες τιμές $x_4 = \lambda \in \mathbb{F}$ στη μεταβλητή x_4 και λύνοντας τις εξισώσεις ως προς τις άλλες τρεις ως $x_1 = -\alpha/(1+\alpha) + \alpha\lambda$, $x_2 = 1/(1+\alpha) - \lambda$, $x_3 = 1 - \alpha\lambda$.

19. Θα δείξουμε ότι το δοσμένο σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$ ακριβώς όταν $\alpha \notin \{-1, 0, 1\}$ και ότι είναι αδύνατο ακριβώς όταν έχουμε είτε $\alpha = 1$ και

$\beta \neq 1$, είτε $\alpha = 0$ και $\beta \notin \{0, 1\}$, είτε $\alpha = -1$ και $\beta \notin \{-1, 1\}$. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \beta \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \beta^2 \end{array}\right).$$

Αφαιρώντας την πρώτη γραμμή από τις δύο άλλες προκύπτει ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha^2 - 1 & \beta - 1 \\ 0 & \alpha^2 - 1 & \alpha^4 - 1 & \beta^2 - 1 \end{array}\right).$$

Αν $\alpha = 1$, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις για $\beta = 1$ και είναι αδύνατο διαφορετικά. Υποθέτουμε ότι $\alpha \neq 1$ και πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη και τρίτη γραμμή με $1/(\alpha - 1)$ για να βρούμε το γραμμοϊσοδύναμο πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha + 1 & (\beta - 1)/(\alpha - 1) \\ 0 & \alpha + 1 & (\alpha + 1)(\alpha^2 + 1) & (\beta^2 - 1)/(\alpha - 1) \end{array}\right).$$

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη γραμμή με $-(\alpha + 1)$ και προσθέτοντας στην τρίτη γραμμή προκύπτει ο γραμμοϊσοδύναμος κλιμακωτός πίνακας

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha + 1 & (\beta - 1)/(\alpha - 1) \\ 0 & 0 & (\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha) & (\beta - 1)(\beta - \alpha)/(\alpha - 1) \end{array}\right).$$

Συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση αν $\alpha \notin \{-1, 0, 1\}$ και ότι αν $\alpha = 0$ (αντίστοιχα, $\alpha = -1$), τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις για $\beta \in \{0, 1\}$ (αντίστοιχα, $\beta \in \{-1, 1\}$) και είναι αδύνατο διαφορετικά. Για $\alpha = 2$ ο παραπάνω πίνακας είναι ίσος με

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \beta - 1 \\ 0 & 0 & 6 & (\beta - 1)(\beta - 2) \end{array}\right)$$

και αντιστοιχεί στο σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_2 + 3x_3 & = & \beta - 1 \\ 6x_3 & = & (\beta - 1)(\beta - 2) \end{array} \right.$$

το οποίο έχει μοναδική λύση $x_1 = (\beta - 2)(\beta - 4)/3$, $x_2 = -(\beta - 1)(\beta - 4)/2$, $x_3 = (\beta - 1)(\beta - 2)/6$.

20. Από το δοσμένο πίνακα μπορεί να προκύψει ο ταυτοτικός προσθέτοντας τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη, πολλαπλασιάζοντας έπειτα τη δεύτερη γραμμή με -1, προσθέτοντας μετά την πρώτη γραμμή στη δεύτερη και αφαιρώντας τέλος τη δεύτερη γραμμή από την πρώτη. Από τους μετασχηματισμούς αυτούς προκύπτει η ισότητα

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2$$

και επομένως

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

21. Οι προτάσεις είναι και οι τρεις σωστές. Για το (α) αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A αν και μόνο αν υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_r \in \mathbb{F}^{m \times m}$ τέτοιοι ώστε $B = (E_r \cdots E_2 E_1)A$ και ότι ένας πίνακας $P \in \mathbb{F}^{m \times m}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο P είναι ίσος με το γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πινάκων. Για το (β) ας υποθέσουμε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος και ότι το $Ax = b$ έχει λύση $\xi_0 \in \mathbb{F}^{n \times 1}$, οπότε $A\xi_0 = b$. Θα δείξουμε ότι η λύση αυτή δεν είναι μοναδική. Πράγματι, αφού ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει άπειρες λύσεις. Για κάθε τέτοια λύση $\xi \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ έχουμε $A\xi = 0$ και συνεπώς $A(\xi + \xi_0) = A\xi + A\xi_0 = b$. Κατά συνέπεια το $\xi + \xi_0$ είναι λύση του $Ax = b$ και επομένως το σύστημα αυτό έχει επίσης άπειρες λύσεις. Το (γ) προκύπτει εύκολα με χρήση της θεωρίας των οριζουσών και της ιδιότητας $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Διαφορετικά μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής. Αφού ο AB είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει πίνακας $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $(AB)C = I_n$ ή, ισοδύναμα, $A(BC) = I_n$. Γνωρίζουμε ότι από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι $(BC)A = I_n$ και συνεπώς ότι ο A είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον BC. Με παρόμοιο τρόπο, από την ισότητα $(BC)A = I_n$ συμπεραίνουμε ότι $(CA)B = I_n$ και ότι ο B είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον CA.

22. Εργαζόμενοι με τον επαυξημένο πίνακα $(A \mid I_n)$, αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από καθεμιά από τις υπόλοιπες, έπειτα πολλαπλασιάζουμε κάθε γραμμή εκτός της πρώτης με $-1/2$ και τέλος αφαιρούμε από την πρώτη γραμμή το άθροισμα των υπολοίπων για να συμπεράνουμε ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση

$$x \;=\; A^{-1}b \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

23. Προσθέτοντας στη δεύτερη γραμμή του A την πρώτη, αφαιρώντας από την τρίτη γραμμή του A το διπλάσιο της πρώτης και προσθέτοντας στην τέταρτη γραμμή του A το τριπλάσιο της πρώτης, βρίσκουμε ότι

$$\det(A) \;=\; \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Προσθέτοντας στην τέταρη γραμμή του πίνακα που προέκυψε τη δεύτερη καταλήγουμε σε άνω τριγωνικό πίνακα με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο 1, -1, 1 και -1 και συμπεραίνουμε ότι $\det(A) = (-1)^2 = 1$. Επίσης, από τη βασική ιδιότητα των οριζουσών $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ προκύπτει (με επαγωγή στο n) ότι

$$\det(A^n) \;=\; (\det(A))^n$$

για κάθε τετραγωνικό πίνακα A και $n \in \mathbb{N}$. Στην περίπτωσή μας έχουμε $\det(A^n) = (\det(A))^n = 1^n = 1$.

24. Η ορίζουσα του δοσμένου 3×3 πίνακα, έστω A, είναι ίση με -3. Επομένως, από την ισότητα $A^n = I_3$ προκύπτει ότι $1 = \det(A^n) = (\det(A))^n = (-3)^n$. Άρα, η μόνη δυνατή τιμή του n είναι η $n = 0$.

25. Εκτελώντας τις πράξεις, βρίσκουμε ότι

$$AA^t \;=\; \begin{pmatrix} F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F \end{pmatrix},$$

όπου $F = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, και συνεπώς ότι

$$\det(AA^t) \;=\; (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4.$$

Αφού $\det(AA^t) = (\det(A))^2$, συμπεραίνουμε ότι $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$ και συνεπώς ότι ισχύει το ζητούμενο του (β).

26. Για το (α), προσθέτοντας στην πρώτη γραμμή τις υπόλοιπες γραμμές του δοσμένου πίνακα βρίσκουμε ότι

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;=\; 6\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Αφαιρώντας την πρώτη γραμμή του πίνακα που προέκυψε από καθεμιά από τις υπόλοιπες, βρίσκουμε ότι η ορίζουσα αυτή είναι ίση με 1. Άρα η ορίζουσα που θέλαμε να υπολογίσουμε είναι ίση με 6. Για το (β), προσθέτοντας στη δεύτερη γραμμή του δοσμένου πίνακα την πρώτη και αναπτύσσοντας την ορίζουσα κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης, βρίσκουμε ότι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;&=\; 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\; 4\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; 8 \end{aligned}$$

και συνεπώς η ορίζουσα που ζητάμε να υπολογίσουμε είναι ίση με 16.

27. Συμβολίζουμε με A_n τον $n\times n$ πίνακα που δόθηκε και υπολογίζουμε ότι $\det(A_n) = 2, 3, 4, 5$ για $n = 1, 2, 3, 4$, αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι $\det(A_n) = n+1$ για κάθε θετικό ακέραιο n. Ένας τρόπος είναι ο εξής. Παρατηρούμε ότι αναπτύσσοντας την ορίζουσα π.χ. του A_5 κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης, βρίσκουμε ότι

$$\det(A_5) \;=\; 2\cdot\det(A_4) \;-\; \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα στο δεξιό μέλος της προηγούμενης ισότητας κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, προκύπτει ότι $\det(A_5) = 2\det(A_4) - \det(A_3)$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε γενικότερα ότι ισχύει ο αναγωγικός τύπος

$$\det(A_{n+1}) \;=\; 2\cdot\det(A_n) \;-\; \det(A_{n-1})$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 3$. Από τον τύπο αυτό προκύπτει άμεσα με επαγωγή στο n ότι $\det(A_n) = n + 1$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

28. Το (α) είναι σωστό, αφού

$$\begin{aligned}\det(P^{-1}AP) &= \det(P^{-1})\,\det(A)\,\det(P) \;=\; \det(A)\,\det(P^{-1}P) \\ &= \det(A)\,\det(I_n) \;=\; \det(A).\end{aligned}$$

Το (β) είναι λάθος, αφού π.χ. τα στοιχεία του πίνακα

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι μη αρνητικοί αριθμοί, αλλά $\det(A) = -1$. Το (γ) είναι σωστό, αφού για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ η ορίζουσα $\det(A)$ είναι πραγματικός αριθμός και επομένως $\det(A^tA) = \det(A^t)\det(A) = (\det(A))^2 \geq 0$.

29. Γνωρίζουμε ότι $A^t = -A$. Αν λοιπόν ο n είναι περιττός αριθμός, τότε $\det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$ και συνεπώς $\det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = -\det(A)$, άρα $\det(A) = 0$. Για $n = 2$, ο πίνακας A έχει τη μορφή

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

με $a \in \mathbb{R}$. Έχουμε $\det(A) = a^2$ και συνεπώς οι δυνατές τιμές της ορίζουσας του A είναι ακριβώς οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Είναι αρκετά δυσκολότερο να δείξει κανείς ότι $\det(A) \geq 0$ για κάθε αντισυμμετρικό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και κάθε άρτιο θετικό ακέραιο n.

30. Για το (α) υπολογίζουμε ότι

$$A^tA \;=\; \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & ax+by+cz \\ ax+by+cz & x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\det(A^tA) &= (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - (ax+by+cz)^2 \\ &= (ay-bx)^2 + (az-cx)^2 + (bz-cy)^2.\end{aligned}$$

Το (β) είναι άμεση συνέπεια του (α). Για το (γ) εργαζόμαστε όπως στο (α) και δείχνουμε ότι αν

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ a_2 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_m & x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 2},$$

τότε

$$\begin{aligned}\det(A^tA) &= (a_1^2+\cdots+a_m^2)(x_1^2+\cdots+x_m^2)-(a_1x_1+\cdots+a_mx_m)^2 \\ &= \sum_{1\le i<j\le m}(a_ix_j-a_jx_i)^2 \;\geq\; 0.\end{aligned}$$

31. Για το (α), εξισώνοντας τις ορίζουσες των δύο μελών της ισότητας $A^2 = 2I_4$ παίρνουμε $\det(A^2) = \det(2I_4) = 16$. Αφού όμως $\det(A^2) = (\det(A))^2$, έπεται ότι $(\det(A))^2 = 16$ και συνεπώς $\det(A) = \pm 4$. Οι επιλογές

$$A = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

δείχουν ότι και οι δύο αυτές τιμές για την ορίζουσα του A είναι δυνατές. Για το (β) χρησιμοποιούμε τη γνωστή ισότητα $A\cdot\mathrm{adj}(A) = \det(A)\cdot I_4$. Το ζητούμενο προκύπτει πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την προηγούμενη ισότητα με A και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $A^2 = 2I_2$ και $\det(A) = \pm 4$.

32. Παίρνοντας ορίζουσες στη γνωστή ισότητα $A\cdot\mathrm{adj}(A) = \det(A)\cdot I_n$ προκύπτει ότι $\det(A)\cdot\det(\mathrm{adj}(A)) = (\det(A))^n$ και συνεπώς το ζητούμενο, αν $\det(A)\neq 0$. Έστω ότι $\det(A) = 0$, οπότε $A\cdot\mathrm{adj}(A) = O$. Θα δείξουμε ότι $\det(\mathrm{adj}(A)) = 0$. Αυτό είναι προφανές αν $A = O$, αφού τότε $\mathrm{adj}(A) = O$. Στην αντίθετη περίπτωση, από την ισότητα $A\cdot\mathrm{adj}(A) = O$ προκύπτει ότι ο $\mathrm{adj}(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμος πίνακας (εξηγήστε γιατί) και συνεπώς ότι η ορίζουσά του είναι ίση με μηδέν.

33. Συμβολίζουμε με $X\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ τον πίνακα στήλη κάθε στοιχείο του οποίου είναι ίσο με 1. Για το (β) παρατηρούμε ότι $AX = X$ αν και μόνο αν κάθε γραμμή του A έχει άθροισμα στοιχείων ίσο με 1, οπότε το ζητούμενο προκύπτει από την προφανή ισοδυναμία $AX = X \Leftrightarrow X = A^{-1}X$. Για το (α) συμβολίζουμε με $\Sigma_1,\Sigma_2,\ldots,\Sigma_n$ τις στήλες του A και με c_{ij} τον (i,j) συμπαράγοντα του A. Από την υπόθεση του προβλήματος για τον A έχουμε ότι $\Sigma_1+\Sigma_2+\cdots+\Sigma_n = X$. Λύνοντας αυτή την ισότητα ως προς Σ_j, αντικαθιστώντας στον πίνακα A και χρησιμοποιώντας τις βασικές ιδιότητες της ορίζουσας βρίσκουμε (εξηγήστε τις λεπτομέρειες) ότι $\det(A) = \det(B)$, όπου B είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A αντικαθιστώντας τη στήλη Σ_j με το X. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του B ως προς τη j στήλη βρίσκουμε ότι $\det(A) = \sum_{i=1}^n c_{ij}$. Αφού το (j,i) στοιχείο του A^{-1} είναι ίσο με $c_{ij}/\det(A)$ (εξηγήστε γιατί), η τελευταία ισότητα δείχνει ότι η j γραμμή του πίνακα A^{-1} έχει άθροισμα στοιχείων ίσο με 1, όπως το θέλαμε.

34. Σωστές είναι οι προτάσεις στα (β), (γ) και (δ). Για το (α) αρκεί να θεωρήσει κανείς τυχαίους μη μηδενικούς πίνακες A και B με $A+B = O$. Για το (β) γνωρίζουμε ότι

$P = E_k \cdots E_2 E_1$ για κάποιους στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k \in \mathbb{F}^{m\times m}$ και ότι $\mathrm{rank}(EA) = \mathrm{rank}(A)$ για κάθε στοιχειώδη πίνακα $E \in \mathbb{F}^{m\times m}$ και κάθε πίνακα $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ (στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών δε μεταβάλλουν την τάξη). Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι $\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}(E_k \cdots E_2 E_1 A) = \mathrm{rank}(A)$. Για το (γ) χρησιμοποιούμε το (β) και βρίσκουμε ότι $\mathrm{rank}(AQ) = \mathrm{rank}(AQ)^t = \mathrm{rank}(Q^t A^t) = \mathrm{rank}(A^t) = \mathrm{rank}(A)$, αφού ο Q^t είναι επίσης αντιστρέψιμος πίνακας. Το (δ) έπεται από τα (β) και (γ).

35. Για το (α), γνωρίζουμε ότι υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k \in \mathbb{F}^{m\times m}$ για τους οποίους ο πίνακας $A' = E_k \cdots E_2 E_1 A$ είναι κλιμακωτός και ότι η τάξη του A είναι ίση με το πλήθος, έστω r, των μη μηδενικών γραμμών του A'. Γνωρίζουμε επίσης ότι $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(E_k \cdots E_2 E_1 AB) = \mathrm{rank}(A'B)$ (αφού στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών δε μεταβάλλουν την τάξη). Αφού ο A' έχει r μη μηδενικές γραμμές, ο πίνακας $A'B$ έχει το πολύ r μη μηδενικές γραμμές (εξηγήστε) και συνεπώς $\mathrm{rank}(A'B) \le r$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A'B) \le r = \mathrm{rank}(A)$. Για το (β) χρησιμοποιούμε το (α) και βρίσκουμε ότι $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(AB)^t = \mathrm{rank}(B^t A^t) \le \mathrm{rank}(B^t) = \mathrm{rank}(B)$.

36. Εκτελώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών με τη γνωστή διαδικασία (π.χ. αφαιρώντας πρώτα την πρώτη γραμμή από καθεμιά από τις άλλες, στην περίπτωση του A, και προσθέτοντας τη δεύτερη, τρίτη και τέταρτη γραμμή στην πρώτη, στη περίπτωση του B), βρίσκουμε τους γραμμοϊσοδύναμους με τους A και B, αντίστοιχα, κλιμακωτούς πίνακες

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αφού ο A' έχει δύο μη μηδενικές γραμμές και ο B' έχει τρεις, έχουμε $\mathrm{rank}(A) = 2$ και $\mathrm{rank}(B) = 3$. Για το (β), γνωρίζουμε ότι για τυχαίους πίνακες $P, Q \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ισχύει $\mathrm{rank}(PAQ) \le \mathrm{rank}(A)$ και συμπεραίνουμε από το (α) ότι $PAQ \ne B$.

37. Με τη γνωστή διαδικασία βρίσκουμε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

γραμμοϊσοδύναμο του A. Για το (α) παρατηρούμε ότι $\mathrm{rank}(A) = 3$, αφού ο A' έχει τρεις μη μηδενικές γραμμές, και συμπεραίνουμε ότι οι στήλες του A παράγουν όλο το χώρο $\mathbb{R}^{3\times 1}$, δηλαδή ότι $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathbb{R}^{3\times 1}$. Για το (β) παρατηρούμε ότι η ισότητα $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$ γράφεται

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και οδηγεί στο ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_4 & = & 0 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 & = & 0, \end{array} \right.$$

δηλαδή στο σύστημα $Ax = 0$, όπου $x = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4)^t \in \mathbb{R}^{4\times 1}$. Το σύστημα αυτό είναι ισοδύναμό με το

$$A'x = 0 \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 & = & 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 & = & 0 \\ \lambda_4 = 0 & = & 0, \end{array} \right.$$

το οποίο λύνεται δίνοντας αυθαίρετη τιμή $a \in \mathbb{R}$ στο λ_3 και λύνοντας τις εξισώσεις ως προς τις υπόλοιπες μεταβλητές. Συμπεραίνουμε ότι οι ζητούμενες τετράδες $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ είναι οι $(-2a, a, a, 0)$ για $a \in \mathbb{R}$. Αφού υπάρχουν μη μηδενικές τέτοιες τετράδες, τα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία του $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

38. Για το (α) υποθέτουμε ότι $u_i \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_q \rangle$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Τότε το u_i είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \ldots, v_q$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ και συνεπώς το ίδιο ισχύει για κάθε γραμμικό συνδυασμό των $u_1, u_2, \ldots, u_p$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς $\langle u_1, u_2, \ldots, u_p \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, \ldots, v_q \rangle$. Το αντίστροφο ισχύει αφού $u_i \in \langle u_1, u_2, \ldots, u_p \rangle$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Το (β) έχει αρνητική απάντηση. Γράφουμε τη δοσμένη ισότητα ως $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Λύνοντας το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα βρίσκουμε ότι δεν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $u_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ και συμπεραίνουμε ότι $u_2 \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Από το (α) έπεται ότι $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \neq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

39. Γνωρίζουμε ότι οι στήλες ενός πίνακα $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ παράγουν το χώρο $\mathbb{F}^{m\times 1}$ αν και μόνο αν $\mathrm{rank}(A) = m$ και ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{F}^{m\times 1}$ αν και μόνο αν $\mathrm{rank}(A) = n$. Αφού $A^t \in \mathbb{F}^{n\times m}$, συμπεραίνουμε ότι τα (α) και (β) ισχύουν αν και μόνο αν $m = n$ και ότι το (γ) ισχύει για όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων m, n.

40. Αφού οποιαδήποτε $n+1$ στοιχεία του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, υπάρχουν $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$. Αφού τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, στην προηγούμενη σχέση έχουμε

υποχρεωτικά $\lambda_0 \neq 0$. Ομοίως προκύπτει ότι $\lambda_i \neq 0$ για $1 \leq i \leq n$ και συνεπώς ισχύει το (α). Για το (β) μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\mu_0 \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας την ισότητα $\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n = 0$ με λ_0/μ_0 και αφαιρώντας το αποτέλεσμα από την $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_0}{\mu_0}\, \mu_i \right) v_i \; = \; 0.$$

Αφού τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, από την προηγούμενη σχέση έπεται ότι

$$\lambda_i - \frac{\lambda_0}{\mu_0}\, \mu_i \; = \; 0$$

για $1 \leq i \leq n$. Κατά συνέπεια, θέτοντας $c = \lambda_0/\mu_0 \in \mathbb{F}$, έχουμε $\lambda_i = c\mu_i$ για $0 \leq i \leq n$.

41. Το U είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{4\times 1}$ αφού επαληθεύει τα αντίστοιχα αξιώματα, όπως μπορεί εύκολα να διαπιστώσει κανείς. Τα V και W δεν είναι, αφού για παράδειγμα θέτοντας $x = (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)^t$ και $y = (0 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 0)^t$ έχουμε $x, y \in V$ αλλά $x + y \notin V$ και $x, y \in W$ αλλά $x + y \notin W$.

42. Για το (α) παρατηρούμε πρώτα ότι $(0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)^t \in W$. Επίσης, υποθέτοντας ότι $x = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4)^t \in W$ και $y = (y_1 \;\; y_2 \;\; y_3 \;\; y_4)^t \in W$, έχουμε $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ και $y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές ισότητες και πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με $\lambda \in \mathbb{R}$ προκύπτει ότι $x + y \in W$ και $\lambda x \in W$. Για το (β), λύνουμε την εξίσωση $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ π.χ. ως προς το x_1 και βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} W \;&=\; \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} : \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} \right\} \\ &=\; \left\{ \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} \right\} \\ &=\; \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \;\subseteq\; \mathbb{R}^{4\times 1}. \end{aligned}$$

Ο πίνακας με στήλες τα στοιχεία u_1, u_2, u_3 που βρήκαμε έχει τάξη 3 (εξηγήστε γιατί). Άρα τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^{4\times 1}$ και συνεπώς το $\{u_1, u_2, u_3\}$ είναι βάση του W.

43. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

οι γραμμές του οποίου είναι οι δοσμένοι γεννήτορες του W. Αφαιρώντας την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη και την τρίτη, βρίσκουμε τον κλιμακωτό γραμμοϊσοδύναμο πίνακα

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

και συμπεραίνουμε ότι οι στήλες

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

του ανάστροφου του A' αποτελούν βάση του W. Συμπληρώνουμε τη βάση αυτή του W σε μια βάση του $\mathbb{R}^{5\times 1}$ προσθέτοντας δύο γραμμές στον κλιμακωτό πίνακα A' ώστε να προκύψει αντιστρέψιμος πίνακας, π.χ. ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι στήλες

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

του ανάστροφου του πίνακα αυτού είναι πέντε γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^{5\times 1}$, άρα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^{5\times 1}$ που περιέχει τη $\mathcal{B}$.

44. Για το (α), αφού το δοσμένο σύνολο έχει τρία στοιχεία και $\dim(\mathbb{F}^{3\times 1}) = 3$, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο αυτό είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Πράγματι, για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{F}$ έχουμε

$$\lambda_1(v_1+v_2)+\lambda_2(v_2+v_3)+\lambda_3(v_3+v_1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_3)v_1+(\lambda_1+\lambda_2)v_2+(\lambda_2+\lambda_3)v_3 = 0.$$

Αφού τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{F}^{n\times 1}$, η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο για $\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ και επομένως μόνο για $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Εργαζόμενοι ομοίως για το (β), βρίσκουμε ότι

$$(v_1 + v_2) - (v_2 + v_3) + (v_3 + v_4) - (v_4 + v_1) = 0$$

και συμπεραίνουμε ότι τα $v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_4, v_4+v_1$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία του $\mathbb{F}^{4\times 1}$. Γενικότερα για το (γ), για τυχαίο ακέραιο $n \geq 2$, η ισότητα

$$\lambda_1(v_1 + v_2) + \lambda_2(v_2 + v_3) + \cdots + \lambda_n(v_n + v_1) = 0$$

οδηγεί στο σύστημα των γραμμικών εξισώσεων $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 + \lambda_3 = \cdots = \lambda_n + \lambda_1 = 0$. Το σύστημα αυτό έχει μόνο τη μηδενική λύση αν ο n είναι περιττός αριθμός, ενώ υπάρχει η μη μηδενική λύση $\lambda_i = (-1)^i$ αν ο n είναι άρτιος. Από αυτά έπεται το ζητούμενο.

45. Θεωρούμε τον πυρήνα $\ker(A) = \{x \in \mathbb{F}^{3\times 5} : Ax = 0\}$ του A. Γνωρίζουμε ότι $\dim(\ker(A)) = 5 - \mathrm{rank}(A)$ και, αφού ο A είναι 3×5 πίνακας, ότι $\mathrm{rank}(A) \leq 3$. Άρα $\dim(\ker(A)) \geq 2$ και συνεπώς υπάρχουν δύο γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία u_1, u_2 του $\ker(A)$. Για τα στοιχεία αυτά έχουμε $Au_1 = Au_2 = 0$ και συνεπώς ισχύει το (α). Με το ίδιο σκεπτικό, για το (β) βρίσκουμε ότι $\mathrm{rank}(A) \leq 2$.

46. Θα δείξουμε το (β). Αφού $ad - bc \neq 0$, ένας τουλάχιστον από τους a, b, c, d είναι διάφορος του μηδενός. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $a \neq 0$. Από την ισότητα $au+bv = 0_V$ παίρνουμε $u = -(b/a)v$. Αντικαθιστώντας στην ισότητα $cu + dv = 0_V$ βρίσκουμε ότι $-(bc/a)v + dv = 0_V$ και, πολλαπλασιάζοντας με a, ότι $(ad - bc)v = 0_V$. Από την τελευταία ισότητα και την υπόθεση $ad - bc \neq 0$ προκύπτει ότι $v = 0_V$, οπότε $u = -(b/a)v = 0_V$. Για το (γ) δείτε το αρχείο των συμπληρωματικών ασκήσεων (κεφάλαιο των αφηρημένων διανυσματικών χώρων).

47. Έστω $x \in \langle u, v\rangle$. Τότε $x = \lambda u + \mu v$ για κάποιους αριθμούς $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Παρατηρώντας ότι $v = -(u+w)$, βρίσκουμε ότι $x = \lambda u - \mu(u+w) = (\lambda - \mu)u - \mu w \in \langle u, w\rangle$. Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι $\langle u, v\rangle \subseteq \langle u, w\rangle$. Ομοίως δείχνουμε ότι $\langle u, w\rangle \subseteq \langle u, v\rangle$, ότι $\langle u, v\rangle \subseteq \langle v, w\rangle$ και ότι $\langle v, w\rangle \subseteq \langle u, v\rangle$.

48. Το (α) είναι λάθος αφού αν $V = \mathbb{R}^{1\times 2}$, $W = \{(\lambda\ \lambda) \in V : \lambda \in \mathbb{R}\}$, $u = (1\ 0)$ και $v = (0\ 1)$, τότε $u + v = (1\ 1) \in W$ αλλά $u \notin W$ και $v \notin W$. Το (β) είναι σωστό αφού ο W είναι υπόχωρος του V και συνεπώς αν $x = u+v \in W$ και $y = u-v \in W$, τότε $u = (x + y)/2 \in W$ και $v = (x - y)/2 \in W$, οπότε $\lambda u + \mu v \in W$ για όλα τα $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Για να δείξουμε ότι το (γ) είναι σωστό, ας υποθέσουμε ότι η τομή $\langle u\rangle \cap \langle v\rangle$ περιέχει κάποιο μη μηδενικό στοιχείο $w \in V$. Τότε $w \in \langle u\rangle$ και $w \in \langle v\rangle$ και συνεπώς υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε $w = \lambda u = \mu v$. Αφού $w \neq 0_V$, έχουμε $\lambda, \mu \neq 0$ και συνεπώς $u = \alpha v$ και $v = \beta u$ για $\alpha = \mu/\lambda$ και $\beta = \lambda/\mu$. Παρατηρούμε τώρα ότι για κάθε $x \in \langle u\rangle$ έχουμε $x = cu$ για κάποιο $c \in \mathbb{F}$ και

συνεπώς $x = (c\alpha)v \in \langle v \rangle$. Αυτό δείχνει ότι $\langle u \rangle \subseteq \langle v \rangle$ και ομοίως βρίσκουμε ότι $\langle v \rangle \subseteq \langle u \rangle$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $\langle u \rangle = \langle v \rangle$.

49. Για το (α) παρατηρούμε πρώτα ότι $O \in W$, αφού $A \cdot O = O = O \cdot B$. Παρατηρούμε έπειτα ότι αν $X, Y \in W$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε $AX = XB$ και $AY = YB$ και συνεπώς $A(X+Y) = AX + AY = XB + YB = (X+Y)B$ και $A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda(XB) = (\lambda X)B$, οπότε $X + Y \in W$ και $\lambda X \in W$. Για το (β), θέτουμε

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

και εκτελώντας τις πράξεις, βρίσκουμε ότι $AX = YB$ αν και μόνο αν $a = 0$ και $b = c + d$. Επομένως

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c+d \\ c & d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{F} \right\} = \left\{ c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ c, d \in \mathbb{F} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{F}^{2 \times 2}. \end{aligned}$$

50. Έστω $p(t) \in \mathbb{C}_d(t]$. Έχουμε να δείξουμε ότι το $p(t)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $1, t - a, (t-a)^2, \ldots, (t-a)^d$. Γράφοντας $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_d t^d$ και αναπτύσσοντας τα διώνυμα $(t+a)^k$ σε δυνάμεις του t, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} p(t+a) &= a_0 + a_1(t+a) + a_2(t+a)^2 + \cdots + a_d(t+a)^d \\ &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_d t^d \end{aligned}$$

για κάποιους μιγαδικούς αριθμούς $c_0, c_1, \ldots, c_d$. Αντικαθιστώντας το t με το $t - a$ συμπεραίνουμε ότι $p(t) = c_0 + c_1(t-a) + c_2(t-a)^2 + \cdots + c_d(t-a)^d$.

51. Το (α) είναι λάθος αφού αν u, w είναι δύο οποιαδήποτε γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία ενός χώρου V και $v = -u$, τότε τα u, v, w είναι γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία του V αλλά $w \notin \langle u \rangle = \langle u, v \rangle$. Το (β) είναι σωστό. Πράγματι, έχουμε $w = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 1 \cdot w \in \langle u, v, w \rangle$. Άρα αν ήταν $\langle u, v \rangle = \langle u, v, w \rangle$, τότε $w \in \langle u, v \rangle$ και συνεπώς τα u, v, w θα ήταν γραμμικώς εξαρτημένα, σε αντίθεση με την υπόθεση. Το (γ) είναι λάθος αφού η προτεινόμενη ισότητα δεν ισχύει όταν $u = w$ και τα u, v είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Το (δ) είναι σωστό. Αφού προφανώς $\langle v \rangle \subseteq \langle u, v \rangle \cap \langle v, w \rangle$, αρκεί να δείξουμε ότι $\langle u, v \rangle \cap \langle v, w \rangle \subseteq \langle v \rangle$. Έστω ότι $x \in \langle u, v \rangle \cap \langle v, w \rangle$. Θα δείξουμε ότι $x \in \langle v \rangle$. Εξαιτίας της υπόθεσής μας, υπάρχουν $a, b, c, d \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε $x = au + bv$ και $x = cv + dw$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $au + (b - c)v + dw = 0_V$. Από τη γραμμική ανεξαρτησία των u, v, w προκύπτει ότι $a = d = 0$ (και ότι $b = c$). Επομένως $x = au + bv = bv \in \langle v \rangle$, που ήταν το ζητούμενο.

52. Γράφοντας

$$\begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ a+2b & b+2c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

προκύπτει ότι $W = \langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$, όπου

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$w_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Έπεται ότι το W συμπίπτει με τη γραμμική θήκη των στοιχείων w_1, w_2, w_3, w_4 του V και συνεπώς ότι είναι υπόχωρος του V που παράγεται από τα w_1, w_2, w_3, w_4. Επιπλέον, για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ η σχέση $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4 = O$ οδηγεί στο σύστημα των γραμμικών εξισώσεων $\lambda_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_2 + 2\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, το οποίο έχει τη μοναδική λύση $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Συμπεραίνουμε ότι τα w_1, w_2, w_3, w_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του V και συνεπώς ότι το σύνολο $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ είναι βάση του W, οπότε $\dim(W) = 4$.

53. Ο μηδενικός πίνακας προφανώς ανήκει στο W. Έστω ότι $X, Y \in W$ και $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε $AX^t = -XA$ και $AY^t = -YA$ και συνεπώς $A(X+Y)^t = A(X^t + Y^t) = AX^t + AY^t = -XA - YA = -(X+Y)A$ και $A(\lambda X)^t = A(\lambda X^t) = \lambda(AX^t) = \lambda(-XA) = -(\lambda X)A$. Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι $X + Y \in W$ και $\lambda X \in W$ και συνεπώς ότι ισχύει το (α). Για το (β), θέτουμε

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

και εκτελώντας τις πράξεις, βρίσκουμε ότι $AX^t = -XA$ αν και μόνο αν $d = -a$. Επομένως

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{F} \right\}.$$

Από αυτή την ισότητα έπεται με τη γνωστή διαδικασία ότι το σύνολο

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι βάση του W και συνεπώς ότι $\dim(W) = 3$.

54. Αφού ο $\mathbb{R}_2[t]$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης 3, για το (α) αρκεί να δείξουμε ότι τα $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) + \lambda_3\varphi_3(t) &= \lambda_1(t-a)^2 + \lambda_2(t-b)^2 + \lambda_3(t-c)^2 \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\, t^2 \,-\, 2(\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c)\, t \,+ \\ &\quad\; (\lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2 + \lambda_3 c^2). \end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε $\lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) + \lambda_3\varphi_3(t) = 0$ αν και μόνο αν

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &=& 0 \\ a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\lambda_3 &=& 0 \\ a^2\lambda_1 + b^2\lambda_2 + c^2\lambda_3 &=& 0. \end{array} \right.$$

Αφού

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \;=\; (b-a)(c-a)(c-b) \;\neq\; 0,$$

το ομογενές αυτό σύστημα έχει μόνο τη λύση $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ και επομένως ισχύει το (α). Για το (β) παρατηρούμε ότι η ισότητα $\lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) + \lambda_3\varphi_3(t) = t^2 + t + 1$ είναι ισοδύναμη με το γραμμικό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_3 &=& 1 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_3 &=& 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &=& 1. \end{array} \right.$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε ότι $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = 3/2$ και $\lambda_3 = 0$, οπότε η $t^2 + t + 1 = -\varphi_1(t)/2 + 3\varphi_2(t)/2$ είναι η ζητούμενη έκφραση.

55. Τα (α) και (β) είναι σωστά. Πράγματι, έστω διακεκριμένοι υπόχωροι U_1, U_2 του V διάστασης $n-1$ και υπόχωρος W του V. Υποθέτοντας ότι $W \subseteq U_1 \cap U_2$, έχουμε $W \subseteq U_1$ και $W \subseteq U_2$, οπότε $\dim(W) \le \dim(U_1) = \dim(U_2) = n-1$. Αν ήταν $\dim(W) = n-1$, τότε θα είχαμε $W \subseteq U_1$, $W \subseteq U_2$ και $\dim(W) = \dim(U_1) = \dim(U_2)$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $W = U_1$ και $W = U_2$, σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $U_1 \neq U_2$. Συμπεραίνουμε ότι $\dim(W) \le n-2$, οπότε ισχύει το (α). Ομοίως, υποθέτοντας ότι $U_1, U_2 \subseteq W$ έχουμε $\dim(W) \ge \dim(U_1) = \dim(U_2) = n-1$. Η περίπτωση $\dim(W) = n-1$ απορίπτεται αφού, όπως προηγουμένως, οδηγεί στο εσφαλμένο συμπέρασμα $W = U_1 = U_2$. Άρα έχουμε $\dim(W) = n = \dim(V)$ και συνεπώς $W = V$. Το (γ) όμως είναι λάθος. Πράγματι, έστω $V = \mathbb{R}^{1\times n}$ και

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n) \in V:\ x_{n-1} = 0\} \\ U_2 &= \{(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n) \in V:\ x_n = 0\} \\ U_3 &= \{(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n) \in V:\ x_{n-1} + x_n = 0\}. \end{aligned}$$

Τότε οι U_1, U_2, U_3 είναι διαφορετικοί ανά δύο υπόχωροι του V, ο καθένας διάστασης $n-1$, αλλά η τομή τους

$$U_1 \cap U_2 \cap U_3 \ = \ \{(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n) \in V:\ x_{n-1} = x_n = 0\}$$

είναι υπόχωρος του V διάστασης $n-2$.

56. Παρατηρούμε ότι

$$U + W \ = \ \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Τα τέσσερα αυτά στοιχεία του V είναι γραμμικώς εξαρτημένα, ενώ οποιαδήποτε τρία από αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (εξηγήστε γιατί). Κατά συνέπεια έχουμε $\dim(U+W) = 3$ και, ειδικότερα, $U + W \neq V$. Για το (β) παρατηρούμε ότι $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) = 4 - 3 = 1$ και συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα $U + W$ δεν είναι ευθύ, αφού $U \cap W \neq \{0\}$.

57. Θέτουμε $U = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ και $W = \langle v_{k+1}, \ldots, v_n \rangle$ και παρατηρούμε ότι $U + W = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = V$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $U \cap W = \{0_V\}$. Θεωρούμε τυχαίο στοιχείο $x \in U \cap W$ και δείχνουμε ότι $x = 0_V$ ως εξής. Αφού $x \in U$ και $x \in W$, μπορούμε να γράψουμε $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ και $x = \mu_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \mu_n v_n$ για $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_{k+1}, \ldots, \mu_n \in \mathbb{F}$. Από τις εκφράσεις αυτές προκύπτει ότι

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k - \mu_{k+1} v_{k+1} - \cdots - \mu_n v_n \ = \ 0_V.$$

Αφού τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, από την προηγούμενη ισότητα έπεται ότι $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \mu_{k+1} = \cdots = \mu_n = 0$ και επομένως ότι $x = 0_V$.

58. Για ένα πολυώνυμο

$$p(t) \ = \ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \ \in \ V$$

έχουμε $p(-t) = a_0 - a_1 t + a_2 t^2 - a_3 t^3 + a_4 t^4 - a_5 t^5$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} p(-t) = p(t) \quad &\Leftrightarrow \quad a_1 = a_3 = a_5 = 0, \\ p(-t) = -p(t) \quad &\Leftrightarrow \quad a_0 = a_2 = a_4 = 0. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$U \;=\; \{a_0 + a_2t^2 + a_4t^4 :\; a_0, a_2, a_4 \in \mathbb{R}\} \;=\; \langle 1, t^2, t^4 \rangle \subseteq V$$

και

$$W \;=\; \{a_1t + a_3t^3 + a_5t^5 :\; a_1, a_3, a_5 \in \mathbb{R}\} \;=\; \langle t, t^3, t^5 \rangle \subseteq V.$$

Ειδικότερα, οι U και W είναι υπόχωροι του V και από το (α) της Άσκησης 57 προκύπτει ότι $V = \langle 1, t, t^2, t^3, t^4, t^5 \rangle = \langle 1, t^2, t^4 \rangle \oplus \langle t, t^3, t^5 \rangle = U \oplus W$.

59. Για το (α) υπολογίζουμε ότι για $X, Y \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ ισχύουν $T(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A = (AX - XA) + (AY - YA) = T(X) + T(Y)$ και $T(\lambda X) = A(\lambda X) - (\lambda X)A = \lambda(AX - XA) = \lambda T(X)$. Για το (β) παρατηρούμε ότι η T δεν είναι μονομορφισμός, αφού $T(I_n) = A \cdot I_n - I_n \cdot A = O = T(O)$.

60. Από την Άσκηση 44 γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ είναι βάση του V. Αφού ο T απεικονίζει τη βάση αυτή του V στη βάση $\{v_3, v_2, v_1\}$, έπεται ότι ισχύει το (β). Για το (α) παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} T(v_1) + T(v_2) &= v_3 \\ T(v_1) + T(v_3) &= v_2 \\ T(v_2) + T(v_3) &= v_1. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $T(v_1) + T(v_2) + T(v_3) = (v_1 + v_2 + v_3)/2$ και συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} T(v_1) &= (v_2 + v_3 - v_1)/2 \\ T(v_2) &= (v_1 + v_3 - v_2)/2 \\ T(v_3) &= (v_1 + v_2 - v_3)/2. \end{aligned}$$

61. Θεωρώντας απεικόνιση $T : V \to W$ με $T(x) = 0_W$ για $x \in V$ βλέπουμε ότι η πρόταση στο (α) είναι λανθασμένη. Αντιθέτως, ας υποθέσουμε ότι $T : V \to W$ είναι τυχαία γραμμική απεικόνιση και ότι τα $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του W. Τότε, για $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$,

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \;=\; 0_V \;&\Rightarrow\; T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) \;=\; T(0_V) \\ &\Rightarrow\; \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \cdots + \lambda_n T(v_n) \;=\; 0_W \\ &\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \end{aligned}$$

και συνεπώς τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του V. Άρα, η πρόταση στο (β) είναι σωστή.

62. Για το (α) παρατηρούμε πρώτα ότι $0_W = T(0_V) \in T(U)$, αφού $0_V \in U$. Δείχνουμε έπειτα ότι $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in T(U)$ για όλα τα $w_1, w_2 \in T(U)$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ ως εξής. Αφού $w_1, w_2 \in T(U)$, υπάρχουν $u_1, u_2 \in U$ τέτοια ώστε $w_1 = T(u_1)$ και $w_2 = T(u_2)$. Επομένως, από τη γραμμικότητα της T παίρνουμε $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2) = T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$. Αφού όμως το U είναι υπόχωρος του W και $u_1, u_2 \in U$, έχουμε $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$ και συνεπώς $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \in T(U)$. Για το (β) θέτουμε $\dim(U) = r$, θεωρούμε μια βάση $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ του U και υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} T(U) &= \{T(u) : u \in U\} \ = \ \{T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r) : \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{F}\} \\ &= \{\lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2) + \cdots + \lambda_r T(u_r) : \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{F}\} \\ &= \langle T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_r) \rangle \subseteq W. \end{aligned}$$

Έπεται ότι ο υπόχωρος $T(U)$ του W παράγεται από $r = \dim(U)$ σε πλήθος στοιχεία και συνεπώς ότι ισχύει το (β).

63. Το (α) προκύπτει από τη γραμμικότητα της παραγώγου (την οποία εδώ θεωρούμε γνωστή), αφού για $p(t), q(t) \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ έχουμε

$$\begin{aligned} T(\lambda p(t) + \mu q(t)) &= \lambda p(t) + \mu q(t) + (\lambda p(t) + \mu q(t))' \\ &= \lambda p(t) + \mu q(t) + \lambda p'(t) + \mu q'(t) \\ &= \lambda(p(t) + p'(t)) + \mu(q(t) + q'(t)) \\ &= \lambda T(p(t)) + \mu T(q(t)). \end{aligned}$$

Για το (β), αφού η T είναι γραμμικός μετασχηματισμός ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης, αρκεί να δείξουμε ότι η T είναι μονομορφισμός. Έστω λοιπόν ότι $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d \in \ker(T)$, οπότε $T(p(t)) = 0$. Υπολογίζοντας ότι

$$\begin{aligned} T(p(t)) &= p(t) + p'(t) \ = \ a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d + a_1 + 2a_2 t + \cdots + d a_d t^{d-1} \\ &= (a_0 + a_1) + (a_1 + 2a_2) t + \cdots + (a_{d-1} + d a_d) t^{d-1} + a_d t^d \end{aligned}$$

οδηγούμαστε στο σύστημα των εξισώσεων $a_0 + a_1 = a_1 + 2a_2 = \cdots = a_{d-1} + d a_d = a_d = 0$. Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει ότι $a_0 = a_1 = \cdots = a_d = 0$, δηλαδή $p(t) = 0$. Έπεται ότι $\ker(T) = \{0\}$ και συνεπώς το ζητούμενο.

64. Θέτουμε $V = \mathbb{F}[t]$ και ορίζουμε απεικονίσεις $S, T : V \to V$ με

$$S(p(t)) \ = \ t p(t), \qquad T(p(t)) \ = \ \frac{p(t) - p(0)}{t},$$

για $p(t) \in V$. Προφανώς η S είναι γραμμικός μετασχηματισμός του V (εξηγήστε) και για $p(t) \in V$ έχουμε $p(t) \in \ker(S) \Leftrightarrow S(p(t)) = 0 \Leftrightarrow t p(t) = 0 \Leftrightarrow p(t) = 0$.

Επομένως $\ker(S) = \{0\}$ και συνεπώς η S είναι μονομορφισμός. Παρατηρούμε επίσης ότι τα μη μηδενικά σταθερά πολυώνυμα (γενικότερα, τα στοιχεία του V με μη μηδενικό σταθερό όρο) δεν ανήκουν στην εικόνα της S και συνεπώς η S δεν είναι επιμορφισμός. Παρατηρούμε τώρα ότι για $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d$ έχουμε $p(0) = a_0$ και συνεπώς

$$T(p(t)) \;=\; \frac{p(t) - p(0)}{t} \;=\; a_1 + a_2 t + \cdots + a_d t^{d-1} \in V.$$

Άρα η απεικόνιση $T : V \to V$ είναι καλά ορισμένη και (εξηγήστε γιατί) αποτελεί γραμμικό μετασχηματισμό του V. Αφού για κάθε σταθερό πολυώνυμο $p(t) = a_0 \in V$ έχουμε $T(p(t)) = 0$, η T δεν είναι μονομορφισμός. Είναι όμως επιμορφισμός αφού για κάθε $q(t) \in V$ υπάρχει το πολυώνυμο $p(t) = tq(t) \in V$ για το οποίο ισχύει $p(0) = 0$ και συνεπώς $T(p(t)) = p(t)/t = q(t)$.

65. Έχουμε $T(x) = 0$ αν και μόνο αν το x ικανοποιεί το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε τις λύσεις $x_1 = x_3 = \lambda$ και $x_2 = x_4 = \mu$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και συμπεραίνουμε ότι $\ker(T) = \{(\lambda \ \mu \ \lambda \ \mu)^t : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ και ότι $\dim\ker(T) = 2$. Από τη θεμελιώδη εξίσωση $\mathrm{rank}(T) = \dim(V) - \dim\ker(V)$ προκύπτει ότι $\dim\mathrm{Im}(T) = \mathrm{rank}(T) = 2$. Παρατηρούμε τέλος ότι αν

$$W \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} : \; a, b, \in \mathbb{R} \right\},$$

τότε $T(x) \in W$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^{4\times 1}$. Ισοδύναμα, έχουμε $\mathrm{Im}(T) \subseteq W$. Αφού όμως το W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ διάστασης 2 και $\dim\mathrm{Im}(T) = 2$, έχουμε υποχρεωτικά $\mathrm{Im}(T) = W$.

66. Για $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{R}_2[t]$ έχουμε

$$\begin{array}{rcl} p(0) & = & a_0 \\ p(1) & = & a_0 + a_1 + a_2 \\ p(2) & = & a_0 + 2a_1 + 4a_2 \\ p(3) & = & a_0 + 3a_1 + 9a_2. \end{array}$$

Για το (α) βρίσκουμε ότι το ομογενές γραμμικό σύστημα $p(0) = p(1) = p(2) = p(3) = 0$ στους αγνώστους a_0, a_1, a_2 έχει μόνο την τετριμμένη λύση $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ και συμπεραίνουμε ότι $T(p(t)) = 0$ μόνο αν $p(t) = 0$. Άρα $\ker(T) = \{0\}$, οπότε ο T είναι μονομορφισμός και η θεμελιώδης εξίσωση της διάστασης δίνει ότι $\dim\mathrm{Im}\,(T) = \dim(\mathbb{R}_2[t]) - \dim\ker(T) = 3 - 0 = 3$. Για το (β), ας συμβολίσουμε με W τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^{4\times 1}$ που εμφανίζεται στο δεξιό μέλος της προτεινόμενης ισότητας. Προφανώς, $\dim(W) = 3$. Υπολογίζοντας ότι

$$\begin{aligned} p(0) - 3p(1) + 3p(2) - p(3) &= a_0 - 3(a_0 + a_1 + a_2) + 3(a_0 + 2a_1 + 4a_2) \\ &\quad -(a_0 + 3a_1 + 9a_2) = 0, \end{aligned}$$

συμπεραίνουμε ότι $T(p(t)) \in W$ για κάθε $p(t) \in \mathbb{R}_2[t]$, επομένως ότι $\mathrm{Im}\,(T) \subseteq W$. Αφού όμως $\dim \mathrm{Im}\,(T) = \dim(W) = 3$, έχουμε υποχρεωτικά $\mathrm{Im}\,(T) = W$. Για το (γ), συμπεραίνουμε από το (β) ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα a, b, c, d είναι να ισχύει $a - 3b + 3c - d = 0$.

67. Για το (α), γνωρίζουμε από τη θεμελιώδη εξίσωση της διάστασης ότι $\dim \mathrm{Im}(T) = n - \dim \ker(T) = n - \dim(U) = n - k$. Αφού $\mathrm{Im}(T) \subseteq W$, έχουμε $\dim \mathrm{Im}(T) \le \dim(W)$ και συμπεραίνουμε ότι $\dim(W) \ge n - k$. Για το (β) θεωρούμε βάση $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ του U και την επεκτείνουμε σε βάση $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ του V. Παρατηρούμε επίσης ότι αφού $\dim(W) \ge n - k$, υπάρχουν $n - k$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, έστω $w_{k+1}, \ldots, w_n$, του W. Θεωρούμε τέλος τη μοναδική γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$ με $T(u_i) = 0$ για $1 \le i \le k$ και $T(u_j) = w_j$ για $k < j \le n$ και ισχυριζόμαστε ότι $\ker(T) = U$. Πράγματι, έχουμε $u_i \in \ker(T)$ για $1 \le i \le k$ και συνεπώς $U = \langle u_1, u_2, \ldots, u_k \rangle \subseteq \ker(T)$. Έχουμε επίσης $\mathrm{Im}(T) = \langle T(u_{k+1}), \ldots, T(u_n) \rangle = \langle w_{k+1}, \ldots, w_n \rangle$ και συνεπώς $\dim \mathrm{Im}(T) = n - k$. Άρα, $\dim \ker(T) = k = \dim(U)$. Από τη σχέση αυτή και τη σχέση $U \subseteq \ker(T)$ προκύπτει ότι $\ker(T) = U$.

68. Έχουμε $T(1) = 1$, $T(t) = 1 + t$, $T(t^2) = 2t + t^2$ και $T(t^3) = 3t^2 + t^3$ και συνεπώς ο ζητούμενος πίνακας στο (α) είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Για το (β) βρίσκουμε τη λύση

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Για το (γ) παρατηρούμε ότι η λύση x που βρήκαμε στο (β) είναι η στήλη των συντεταγμένων του πολυωνύμου $p(t) = -4 + 5t - 2t^2 + t^3 \in V$ στην κανονική βάση $(1, t, t^2, t^3)$ του V. Άρα, η στήλη των συντεταγμένων του $T(p(t))$ στην ίδια βάση είναι ίση με $Ax = (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1)^t$, δηλαδή ισχύει $T(p(t)) = 1 + t + t^2 + t^3$.

69. Το (α) είναι λάθος. Ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{n\times 1}$ με

$$T(x) \;=\; \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \end{pmatrix}$$

για $x = (x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n)^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ δεν είναι ισομορφισμός, αλλά ο πίνακάς του

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ως προς την κανονική διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^{n\times 1}$ δεν έχει μηδενικές στήλες. Τα (β) και (γ) είναι σωστά. Για το (β) παρατηρούμε ότι $\ker(T) \neq \{0\}$ και συνεπώς ότι υπάρχει διατεταγμένη βάση $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ του V με $v_1 \in \ker(T)$. Αφού $T(v_1) = 0$, η πρώτη στήλη του πίνακα της T ως προς τη βάση αυτή είναι η μηδενική στήλη. Για το (β) επιλέγουμε διατεταγμένη βάση $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ του V η οποία επεκτείνει τυχαία βάση $(w_1, w_2, \ldots, w_r)$ του υπόχωρου $\mathrm{Im}(T)$. Αφού η T δεν είναι ισομορφισμός, η εικόνα της $\mathrm{Im}(T)$ είναι γνήσιος υπόχωρος του V και συνεπώς έχουμε $r = \dim \mathrm{Im}(T) < n$. Αφού καθένα από τα $T(w_i)$ για $1 \le i \le n$ ανήκουν στην εικόνα $\mathrm{Im}(T)$, άρα είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $w_1, w_2, \ldots, w_r$, ο πίνακας της T ως προς τη βάση $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ έχει τις τελευταίες $n-r$ γραμμές του ίσες με τη μηδενική γραμμή.

70. Για το (α) υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} T(E_{11}) \;&=\; AE_{11} \;+\; E_{11}A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;+\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

και ομοίως βρίσκουμε ότι

$$T(E_{12}) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \;\; T(E_{21}) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \;\; T(E_{22}) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, ο πίνακας της T ως προς τη διατεταγμένη βάση $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

και εκείνος της $T^2 = T \circ T$ είναι ο

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Για το (β) υπολογίζουμε ότι $\det(A) = 16$ και συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, οπότε το ίδιο ισχύει για τον T. Για το (γ), λύνοντας το γραμμικό σύστημα $A^2 x = (12\ \ 8\ \ 8\ \ 12)^t$ βρίσκουμε τη μοναδική λύση $x = (1\ \ -1\ \ 2\ \ 1)^t$ και συμπεραίνουμε ότι

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

71. Θα δείξουμε ότι οι δυνατές τιμές της ορίζουσας είναι οι 0 και 1. Έστω A ο πίνακας της T ως προς τη δοσμένη βάση $\mathcal{B}$. Αφού $T \circ T = T$ και ο πίνακας της $T \circ T$ ως προς τη $\mathcal{B}$ είναι ίσος με A^2, θα πρέπει να έχουμε $A^2 = A$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι $\det(A) = \det(A^2) = (\det(A))^2$ και συνεπώς ότι $\det(A) \in \{0, 1\}$. Επιπλέον, για την περίπτωση του μηδενικού και του ταυτοτικού μετασχηματισμού $T : V \to V$ έχουμε $A = O$ ή I_n και συνεπώς $\det(A) = 0$ ή 1, αντίστοιχα. Επομένως και οι δύο αυτές τιμές είναι εφικτές.

72. Για το (α) υπολογίζουμε ότι

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

και συμπεραίνουμε ότι οι στήλες του παραπάνω πίνακα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Για το (β) υπολογίζουμε ότι $T(v_1) = 2v_1$, $T(v_2) = -v_2$ και $T(v_3) = -v_3$ και συμπεραίνουμε ότι

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Αφού ο πίνακας του T ως προς την κανονική διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$ είναι ο A και ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση στη βάση $\mathcal{B}$ είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

από τον τύπο αλλαγής βάσης παίρνουμε $\Delta = P^{-1}AP$ ή, ισοδύναμα, $A = P\Delta P^{-1}$. Με επαγωγή στο n έπεται ότι $A^n = P\Delta^n P^{-1}$ για κάθε φυσικό αριθμό n. Επομένως

$$A^n \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

από όπου μετά από πράξεις προκύπτει ότι

$$A^n \;=\; \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n-1} & 2^n + (-1)^{n-1} \\ 2^n + (-1)^{n-1} & 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n-1} \\ 2^n + (-1)^{n-1} & 2^n + (-1)^{n-1} & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

73. Για το (α), θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό $L_A : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$ με $L_A(x) = Ax$ για $x \in \mathbb{R}^{2\times 1}$. Ως γνωστόν, ο πίνακας του L_A ως προς την κανονική διατεταγμένη βάση $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (e_1, e_2)$ του $\mathbb{R}^{2\times 1}$ είναι ίσος με A. Λύνοντας το ομογενές σύστημα $Ax = 0$, βρίσκουμε ότι το $v_2' = (1\ \ 1)^t$ αποτελεί βάση του πυρήνα $\ker(L_A)$. Συμπληρώνουμε σε διατεταγμένη βάση $\mathcal{B}' = (v_1', v_2')$ του $\mathbb{R}^{2\times 1}$, π.χ. θέτοντας $v_1' = e_1 = (1\ \ 0)^t$. Υπολογίζουμε ότι $L_A(v_1') = Av_1' = Ae_1 = (1\ \ -1)^t$ και θέτουμε $w_1' = (1\ \ -1)^t$. Συμπληρώνουμε σε διατεταγμένη βάση $\mathcal{C}' = (w_1', w_2')$ του $\mathbb{R}^{2\times 1}$, π.χ. θέτοντας $w_2' = e_1 = (1\ \ 0)^t$. Αφού $L_A(v_1') = w_1'$ και $L_A(v_2') = 0$, ο πίνακας του L_A ως προς τις διατεταγμένες βάσεις $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{C}'$ είναι ίσος με τον πίνακα J. Από τον τύπο αλλαγής βάσης προκύπτει ότι $J = Q_1^{-1}AP_1$, όπου

$$P_1 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; Q_1 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι οι πίνακες αλλαγής βάσης από τη $\mathcal{B}$ στη $\mathcal{B}'$ και από τη $\mathcal{C}$ στη $\mathcal{C}'$, αντίστοιχα. Με ανάλογο τρόπο, για το (β) βρίσκουμε ότι $J = Q_2^{-1}BP_2$, όπου

$$P_2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \;\; Q_2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Για το (γ), χρησιμοποιούμε τα (α) και (β) και παρατηρούμε ότι

$$B \;=\; Q_2JP_2^{-1} \;=\; Q_2(Q_1^{-1}AP_1)P_2^{-1} \;=\; (Q_2Q_1^{-1})A(P_1P_2^{-1}).$$

Άρα, έχουμε $B = Q^{-1}AP$ όπου

$$P \;=\; P_1P_2^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \;\; Q \;=\; Q_1Q_2^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

74. Για το (α) παρατηρούμε πρώτα ότι $C^2 = O$. Έστω τώρα ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ είναι όμοιος προς τον C. Τότε, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ τέτοιος ώστε $A = P^{-1}CP$ και συνεπώς

$$A^2 \;=\; (P^{-1}CP)(P^{-1}CP) \;=\; P^{-1}C(PP^{-1})CP \;=\; P^{-1}C^2P \;=\; O.$$

Επίσης έχουμε $A \neq O$, αφού $C = PAP^{-1}$ και $C \neq O$. Για το (β), υποθέτουμε ότι ο $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ είναι μη μηδενικός πίνακας και ότι $A^2 = O$. Αφού $A \neq O$, έχουμε $\operatorname{rank}(A) \geq 1$. Αφού $A^2 = O$, ο A δεν είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς $\operatorname{rank}(A) \neq 2$. Συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{rank}(A) = 1$, οπότε $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(C)$ και επομένως ο A είναι ισοδύναμος προς τον C. Για το (γ) θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{F}^{2\times 1} \to \mathbb{F}^{2\times 1}$ με $T(x) = Ax$ για $x \in \mathbb{F}^{2\times 1}$ και υπενθυμίζουμε ότι ο πίνακας του T ως προς την κανονική διατεταγμένη βάση του $\mathbb{F}^{2\times 1}$ είναι ίσος με A. Όπως δείξαμε προηγουμένως, ισχύει $\operatorname{rank}(A) = 1$. Άρα $\operatorname{rank}(T) = 1$ και συνεπώς $\dim\ker(T) = 1$. Θεωρούμε διατεταγμένη βάση (u, v) του $\mathbb{F}^{2\times 1}$ με $u \in \ker(T)$ και γράφουμε $T(v) = au + bv$, με $a, b \in \mathbb{F}$. Από τη σχέση $A^2 = O$ προκύπτει ότι $T^2 = T \circ T = 0$. Κατά συνέπεια, έχουμε

$$0 \;=\; T(T(v)) \;=\; T(au + bv) \;=\; aT(u) + bT(v) \;=\; bT(v) \;=\; abu + b^2v$$

και επομένως $ab = b^2 = 0$. Άρα $b = 0$, δηλαδή $T(v) = au$. Έχουμε επίσης $a \neq 0$, αφού $v \notin \ker(T)$. Από τα παραπάνω, και αφού $T(au) = aT(u) = 0$, συμπεραίνουμε ότι το ζεύγος (au, v) είναι διατεταγμένη βάση του $\mathbb{F}^{2\times 1}$ ως προς την οποία ο μετασχηματισμός T έχει πίνακα C. Άρα, οι πίνακες A και C παριστάνουν τον ίδιο γραμμικό μετασχηματισμό ως προς δύο (πιθανώς διαφορετικές) διατεταγμένες βάσεις του $\mathbb{F}^{2\times 1}$ και συνεπώς είναι όμοιοι. Για το (δ) χρησιμοποιούμε το (γ) για να συμπεράνουμε ότι καθένας από τους A και B είναι όμοιος προς τον C και συνεπώς ότι οι A και B είναι και μεταξύ τους όμοιοι.

75. Τα (α) και (β) είναι σωστά. Πράγματι, έστω ότι ο $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι όμοιος προς τον $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και έστω αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$. Τότε, έχουμε

$$B^3 \;=\; (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \;=\; P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})AP \;=\; P^{-1}A^3P$$

και

$$B + I_n \;=\; P^{-1}AP + I_n \;=\; P^{-1}AP + P^{-1}P \;=\; P^{-1}(A + I_n)P.$$

Κατά συνέπεια, ο A^3 είναι όμοιος προς τον B^3 και ο $A + I_n$ είναι όμοιος προς τον $B + I_n$. Το (γ) είναι λάθος. Πράγματι, αφού $n \geq 2$, υπάρχουν διακεκριμένοι πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ οι οποίοι είναι όμοιοι μεταξύ τους. Για παράδειγμα, για $n = 4$ τέτοιοι πίνακες είναι (εξηγήστε) οι

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Γενικότερα, μπορούμε να επιλέξουμε ως A και B οποιουσδήποτε διακεκριμένους διαγώνιους πίνακες, τέτοιους ώστε τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του ενός να αποτελούν μετάθεση των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του άλλου. Θέτοντας $C = -B$, έχουμε ότι ο A είναι όμοιος προς τον B αλλά ο $A + C$ δεν είναι όμοιος προς τον $B + C$, διότι $A + C = A - B \neq O$, $B + C = O$ και ο μόνος πίνακας ο οποίος είναι όμοιος προς το μηδενικό πίνακα O είναι ο ίδιος ο μηδενικός πίνακας.