Γραμμική Άλγεβρα Ι
Θέματα Εξετάσεων Φεβρουαρίου 2015

1. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

(α) Δείξτε ότι ο πίνακας AA^t είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφό του.

(β) Υπολογίστε την ορίζουσα του A^tA. Είναι ο πίνακας αυτός αντιστρέψιμος;

(γ) Βρείτε πίνακα $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με μη μηδενικές στήλες, τέτοιον ώστε $AB = O$.

2. Θεωρούμε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 2x_4 & = & 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 & = & 7 \end{array} \right.$$

με αγνώστους $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

(α) Βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος.

(β) Υπάρχουν δύο γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^{4\times 1}$ τα οποία είναι λύσεις του συστήματος;

(γ) Υπάρχουν τρία γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^{4\times 1}$ τα οποία είναι λύσεις του συστήματος;

3. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{4\times 1}$ με $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_4 + x_1 \end{pmatrix}$.

(α) Υπολογίστε τη διάσταση του πυρήνα $\ker(T)$ και της εικόνας $\mathrm{im}(T)$ της T.

(β) Βρείτε μια βάση της εικόνας $\mathrm{im}(T)$. Ανήκει το στοιχείο $(2 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 4)^t$ του $\mathbb{R}^{4\times 1}$ στην $\mathrm{im}(T)$;

(γ) Δείξτε ότι $\mathrm{im}(T) = \mathrm{im}(T \circ T)$.

4. Δίνονται διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{R}$, διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ αυτού με $v_1 = u_1$, $v_2 = u_1 + u_2$ και $v_3 = u_1 + u_2 + u_3$ και γραμμικοί μετασχηματισμοί $S : V \to V$ και $T : V \to V$ με πίνακες

$$(S : \mathbf{u}, \mathbf{u}) \; = \; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (T : \mathbf{v}, \mathbf{v}) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ως προς τη $\mathbf{u}$ και τη $\mathbf{v}$, αντίστοιχα.

(α) Υπολογίστε τον πίνακα $(S : \mathbf{v}, \mathbf{v})$ του μετασχηματισμού S ως προς τη βάση $\mathbf{v}$ και εκφράστε το $S(v_1 - 3v_2 + 2v_3)$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της $\mathbf{v}$.

(β) Είναι οι δοσμένοι πινακες $(S : \mathbf{u}, \mathbf{u})$ και $(T : \mathbf{v}, \mathbf{v})$ ισοδύναμοι;

(γ) Βρείτε τη διάσταση και μία βάση του υπόχωρου $\ker(S) + \ker(T)$ του V.

(δ) Υπολογίστε την τάξη του γραμμικού μετασχηματισμού $S \circ T^{100}$ του V.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 18/2/2014 – Καλή Επιτυχία