Γραμμική Άλγεβρα Ι
Κατατακτήριες Εξετάσεις 2013–2014
Κατάταξη στο Α Εξάμηνο
Σειρά Θεμάτων Β

1. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(α) Λύστε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ για $b = (8 \ \ -2 \ \ -4 \ \ 0)^t$, όπου $x \in \mathbb{R}^{4\times 1}$.

(β) Δείξτε ότι το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση $x \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}^{4\times 1}$.

2. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

(α) Αν V είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος, W είναι υπόχωρος του V και για τα $u, v \in V$ ισχύουν $2u - v \in W$ και $3u + 2v \in W$, τότε $u + v \in W$.

(β) Αν u, v, w είναι διακεκριμένα μη μηδενικά στοιχεία του διανυσματικού χώρου V και τα $\{u, v\}$ και $\{v, w\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα υποσύνολα του V, τότε και το $\{u, w\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο υποσύνολο του V.

(γ) Αν u, v, w είναι διακεκριμένα στοιχεία του διανυσματικού χώρου V και τα $\{u, v\}$ και $\{v, w\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα υποσύνολα του V, τότε και το $\{u, w\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του V.

3. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται θέτοντας
$f_a(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + x_4, x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4, -x_1 - 2x_2 + ax_3 + ax_4)$.

(α) Δείξτε ότι $\dim_{\mathbb{R}}(ker f_a) \leq 2$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $a = 1$.

(β) Για $a = 1$ βρείτε μια βάση της εικόνας $Im f_1$ της f_1.

(γ) Δείξτε ότι αν V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2, τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει μη μηδενικό $v \in V$ τέτοιο ώστε $v \in Im f_a$.

4. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $\det(A) = 2$.

(α) Δείξτε ότι οι πίνακες A και A^2 είναι ισοδύναμοι.

(β) Για $n = 2$ βρείτε παράδειγμα πίνακα A (με ορίζουσα 2) τέτοιο ώστε οι $A + I_2$ και $A^2 + I_2$ να μην είναι ισοδύναμοι, όπου $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(γ) Δείξτε ότι οι πίνακες A και A^2 δεν είναι όμοιοι.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 26/2/2014 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία