Γραμμική Άλγεβρα Ι
Κατατακτήριες Εξετάσεις 2011–2012
Κατάταξη στο Α Εξάμηνο

1. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(α) Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφό του.

(β) Δείξτε ότι $\det(ABA) = \det(B)$ για κάθε πίνακα $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

2. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ και οι υπόχωροι

$$U = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : AX = O\}, \qquad V = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : XB = O\},$$
$$W = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : AXB = O\}$$

του πραγματικού διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(α) Υπολογίστε τις διαστάσεις των U, V, W.

(β) Δείξτε ότι $U + V = W$.

3. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{1\times 3} \to \mathbb{R}^{1\times 3}$ με

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, -3x_1 + 2x_3, -x_1 + 4x_2)$$

για $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

(α) Υπολογίστε τη διάσταση της εικόνας της T.

(β) Υπάρχει διατεταγμένη βάση (v_1, v_2, v_3) του $\mathbb{R}^{1\times 3}$ τέτοια ώστε $T(v_1) = T(v_2) = T(v_3)$;

4. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(α) Είναι ο πίνακας A ισοδύναμος προς τον B;

(β) Είναι ο πίνακας A όμοιος προς τον B;

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 13/12/2011 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία