Γραμμική Άλγεβρα Ι
Κατατακτήριες Εξετάσεις 2010–2011
Κατάταξη στο Α Εξάμηνο

1.

(α) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και έστω W ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $(1,2,1,1)$, $(2,0,3,0)$ και $(8,4,11,a)$. Υπολογίστε τη διάσταση του W για τις διάφορες τιμές του a.

(β) Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 10 \\ 11 & 12 & 13 & \cdots & 20 \\ 21 & 22 & 23 & \cdots & 30 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 91 & 92 & 93 & \cdots & 100 \end{pmatrix}$.

2. Έστω

$$U = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \; A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \right\},$$

όπου $\mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των 2×2 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι το U είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(β) Βρείτε μια βάση του U και υπολογίστε τη διάστασή του.

3. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x,y) = (x-y, x+y, x+2y)$ για $x, y \in \mathbb{R}$.

(α) Υπολογίστε τη διάσταση του πυρήνα της f.

(β) Εξετάστε αν υπάρχουν διατεταγμένη βάση (v_1, v_2) του $\mathbb{R}^2$ και διατεταγμένη βάση (u_1, u_2, u_3) του $\mathbb{R}^3$ τέτοιες ώστε $f(v_1) = u_1$ και $f(v_2) = O$.

4. Δίνονται γραμμικές απεικονίσεις $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ και $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.

(α) Δείξτε ότι η σύνθεση $f \circ g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ δεν είναι αντιστρέψιμη απεικόνιση.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^4$ τέτοιο ώστε $g(x) = h(x)$.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 14/12/2010 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία