ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χρωματικές Συμμετρικές Συναρτήσεις

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Καλαμπόγια - Ευαγγελινού Κατερίνα

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
Χρήστος Α. Αθανασιάδης

Αθήνα
Σεπτέμβριος 2019

Στη μνήμη του πατέρα μου,
Χάρη Καλαμπόγια

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Ο χρωματισμός γραφημάτων κατέχει εξέχουσα θέση στη Συνδυαστική. Έχει μεγάλη ποικιλία εφαρμογών και παρουσιάζει πλήθος ανοιχτών προβλημάτων. Η ιστορία του χρωματισμού γραφημάτων μπορεί να χρονολογηθεί από το 1852 όταν ο de Morgan έγραψε ένα γράμμα στον Hamilton πληροφορώντας τον ότι ένας μαθητής του παρατήρησε πως αν χρωματίσει τις διοικητικές περιφέρειες της Αγγλίας σε ένα χάρτη, μόνο τέσσερα χρώματα είναι απαραίτητα έτσι ώστε γειτονικές περιφέρειες να μην έχουν το ίδιο χρώμα. Το πρόβλημα που έθετε ήταν το έξης: ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτείται για να χρωματιστεί ένας επίπεδος χάρτης, πραγματικός ή φανταστικός; Ο χρωματισμός ενός τέτοιου χάρτη μπορεί να ιδωθεί ως χρωματισμός ενός επίπεδου γραφήματος. Το 1912 ο Birkhoff εισήγαγε την έννοια του χρωματικού πολυωνύμου για την περίπτωση επίπεδων γραφημάτων, για να μελετήσει προβλήματα χρωματισμού. Το 1932 ο Whitney όρισε το χρωματικό πολυώνυμο για τυχαία γραφήματα.

Το 1995 ο Stanley γενίκευσε το χρωματικό πολυώνυμο, ορίζοντας τη χρωματική συμμετρική συνάρτηση ενός γραφήματος. Απέδειξε ότι αυτή η συμμετρική συνάρτηση μας δίνει περισσότερες πληροφορίες για ένα γράφημα από ότι το χρωματικό του πολυώνυμο. Από τότε οι χρωματικές συμμετρικές συναρτήσεις έχουν μελετηθεί διεξοδικά και έχουν βρεθεί σχέσεις τους με άλλους κλάδους των μαθηματικών. Η έρευνα εστιάζεται σε μεγάλο βαθμό σε μια εικασία που διατύπωσε ο ίδιος ο Stanley και η οποία παραμένει ακόμα ανοιχτή. Το 2012 οι Shareshian και Wachs γενίκευσαν την χρωματική συμμετρική συνάρτηση, ορίζοντας ένα quasi-συμμετρικό ανάλογό της. Ο ορισμός αυτός οδήγησε σε νέα αποτελέσματα και ανοιχτά προβλήματα και σε καινούριες διασυνδέσεις με άλλους κλάδους των μαθηματικών.

Η παρούσα εργασία αφορά τη μελέτη των παραπάνω ζητημάτων. Η δομή που επιλέχθηκε είναι η ακόλουθη. Στο Κεφάλαιο 1 δίνουμε κάποιους ορισμούς σε σχέση με τα γραφήματα και τις μερικές διατάξεις και περιγράφουμε τις βασικές ιδιότητες του χρωματικού πολυωνύμου. Επιπλέον περιγράφουμε τη δομή δύο σημαντικών κλάσεων μερικώς διατεταγμένων συνόλων, που παίζουν κεντρικό ρόλο στη θεωρία των χρωματικών συμμετρικών και quasi-συμμετρικών συναρτήσεων. Στο Κεφάλαιο 2 ορίζουμε την άλγεβρα των συμμετρικών και quasi-συμμετρικών συναρτήσεων. Περιγράφουμε κάποιες σημαντικές βάσεις και τη σχέση μεταξύ αυτών των βάσεων και αναφερόμαστε σύντομα στη σύνδεση των συμμετρικών συναρτήσεων με τη θεωρία των αναπαραστάσεων της συμμετρικής ομάδας.

Έχοντας παρουσιάσει τα απαραίτητα εργαλεία στα πρώτα δύο κεφάλαια, στο Κεφάλαιο 3 ορίζουμε την έννοια της χρωματικής συμμετρικής συνάρτησης ενός γραφήματος και αναφέρουμε παραδείγματα και βασικές ιδιότητες. Περιγράφουμε το ανάπτυγμά της στις βάσεις της άλγεβρας των συμμετρικών συναρτήσεων και διατυπώνουμε την εικασία των Stanley-Stembridge σχετικά με την e-θετικότητα μιας οικογένειας γραφημάτων. Τέλος, στο Κεφάλαιο 4 περιγράφουμε τις χρωματικές quasi-συμμετρικές συναρτήσεις. Μελετάμε πότε μια χρωματική quasi-συμμετρική συνάρτηση είναι συμμετρική και αποδεικνύουμε τύπους για το ανάπτυγμά της στις βάσεις της άλγεβρας των συμμετρικών και quasi-συμμετρικών συναρτήσεων. Διατυπώνουμε την εικασία Shareshian-Wachs, που είναι μια γενίκευση της εικασίας Stanley-Stembridge. Ακόμα, περιγράφουμε επιγραμματικά μια σύνδεση των χρωματικών quasi-συμμετρικών συναρτήσεων με την αλγεβρική γεωμετρία.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του κ.Χρήστου Αθανασιάδη, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ. Τον ευχαριστώ θερμά, τόσο για την πολύτιμη βοήθεια του στη συγγραφή της όσο και για τις γενικότερες γνώσεις πάνω στη Συνδυαστική που μου έχει προσφέρει κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά Στοιχεία

1.1 Βασικές Έννοιες

Έστω πεπερασμένο σύνολο S.

Ορισμός 1.1.1. Μετάθεση του S λέγεται κάθε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $w : S \to S$. Συμβολίζουμε με $\mathfrak{S}(S)$ το σύνολο των μεταθέσεων του S και θέτουμε $\mathfrak{S}(S) = \mathfrak{S}_d$ όταν $S = [d] = \{1, 2, \cdots, d\}$. Το $\mathfrak{S}(S)$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων. Η ομάδα $\mathfrak{S}_d$ είναι η συμμετρική ομάδα σε d στοιχεία.

- Έστω $w \in \mathfrak{S}_d$. Αν η w είναι άρτια, δηλαδή γράφεται σαν γινόμενο άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων, γράφουμε $\varepsilon_w = 1$, ενώ αν η w είναι περιττή, δηλαδή γράφεται σαν γινόμενο περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων, γράφουμε $\varepsilon_w = -1$. Τότε $\displaystyle\sum_{w \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon_w = 0$ για $d \geq 2$.

- Έστω $w \in \mathfrak{S}_d$. Κάθοδος της w ονομάζεται ένα $i \in [d-1]$ τέτοιο ώστε $w_i > w_{i+1}$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{des}(w)$ το πλήθος των καθόδων της w. Τα πολυώνυμα $A_d(t) = \displaystyle\sum_{w \in \mathfrak{S}_d} t^{\mathrm{des}(w)}$, $d = 1, 2, \cdots$ ονομάζονται πολυώνυμα Euler και έχουν εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $\displaystyle\sum_{d \geq 0} A_d(t) \frac{z^d}{d!} = \frac{1-t}{\exp z(t-1) - t}$, όπου θέσαμε $A_0(t) = 1$.

- Έστω $w \in \mathfrak{S}_d$. Αντιστροφή της w ονομάζεται ένα ζεύγος $\{w_i, w_j\}$ τέτοιο ώστε $i < j$ και $w_i > w_j$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{inv}(w)$ το πλήθος των αντιστροφών της w. Τότε έχουμε $\displaystyle\sum_{w \in \mathfrak{S}_d} t^{\mathrm{inv}(w)} = [d]_t!$, όπου $[n]_t = 1 + t + \cdots + t^{n-1}$ και $[n]_t! = [1]_t [2]_t \cdots [n]_t$ για $n \in \mathbb{N}$.

- Έστω $w \in \mathfrak{S}_d$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Fix}(w)$ το σύνολο των σταθερών σημείων της w, δηλαδή των $i \in [d]$ με $w_i = i$ και με $\mathrm{fix}(w)$ το πλήθος τους. Θέτουμε D_d το σύνολο των μεταθέσεων του $[d]$ χωρίς σταθερά σημεία.

Ορισμός 1.1.2. Διαμέριση του $d \in \mathrm{N}$ λέγεται κάθε ακολουθία ακεραίων $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ με $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\kappa \geq 1$ και $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = d$. Τα λ_i λέγονται μέρη της λ. Γράφουμε $\lambda \vdash d$ ή $|\lambda| = d$.

Για παράδειγμα η $\lambda = (5,3,2,2,1)$ είναι διαμέριση του 13 με 5 μέρη.
Το πλήθος των μερών μιας διαμέρισης λ ονομάζεται μήκος της λ και συμβολίζεται με $l(\lambda)$.
Έστω $m_i = m_i(\lambda)$ το πλήθος των μερών της λ που είναι ίσα με i. Τότε μπορούμε να γράψουμε $\lambda = \langle 1^{m_1}, 2^{m_2}, \cdots \rangle$.
Ένας από τους κύριους τρόπους που μπορούμε να παραστήσουμε σχηματικά τη διαμέριση ενός ακεραίου είναι το διάγραμμα Young της. Το διάγραμμα Young Y_λ της $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ αποτελείται από $d = |\lambda|$ μοναδιαία τετράγωνα παραταγμένα σε k σειρές. Η σειρά i περιέχει λ_i τετράγωνα και όλες οι σειρές αρχίζουν από αριστερά από την ίδια κατακόρυφο.
Έστω $\mathrm{Par}(d)$ το σύνολο όλων των διαμερίσεων του d και $\mathrm{par}(d)$ το πλήθος τους. Με Par συμβολίζουμε το σύνολο όλων των διαμερίσεων.
Έστω λ διαμέριση του d. Ονομάζουμε συζυγή διαμέριση της λ την διαμέριση του d που έχει διάγραμμα Young ανάστροφο από αυτό της λ, και τη συμβολίζουμε με λ'. Ισοδύναμα $m_i(\lambda') = \lambda_i - \lambda_{i+1}$. Ισχύουν $l(\lambda') = \lambda_1$ και $\lambda'_1 = l(\lambda)$.
Σε κάθε $w \in \mathfrak{S}_d$ αντιστοιχεί μια διαμέριση του d, ο τύπος της w, τα μέρη της οποίας είναι τα μήκη των κύκλων της w. Για παράδειγμα η $w = (57)(142)(36)$ έχει τύπο $\lambda = (3,2,2)$.

- Δύο μεταθέσεις του $[d]$ ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της $\mathfrak{S}_d$ ανν έχουν τον ίδιο τύπο.
- Συμβολίζουμε με C_λ το σύνολο των μεταθέσεων τύπου λ, για λ διαμέριση του d. Άρα η $\mathfrak{S}_d$ έχει $\mathrm{par}(d)$ κλάσεις συζυγίας, τις $C_\lambda, \lambda \vdash d$.
- Αν $\lambda = \langle 1^{m_1}, 2^{m_2}, \cdots, d^{m_d} \rangle$ τότε η κλάση συζυγίας C_λ της $\mathfrak{S}_d$ έχει $\dfrac{d!}{z_\lambda}$ στοιχεία, όπου $z_\lambda = 1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \cdots d^{m_d} m_d!$
- Έστω λ διαμέριση και $w \in C_\lambda$. Ορίζουμε το πρόσημο ε_λ της διαμέρισης λ να είναι ίσο με το πρόσημο ε_w της μετάθεσης w. Για παράδειγμα αν $\lambda = (4,3,3,1)$ τότε $\varepsilon_\lambda = -1$

Ορισμός 1.1.3. Σύνθεση του $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ λέγεται κάθε ακολουθία $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathbb{Z}^k_{>0}$ με $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = d$. Τα a_i λέγονται μέρη της a. Γράφουμε $a \vDash d$.

Για παράδειγμα η $(3,2,4,1)$ είναι σύνθεση του 10 με 4 μέρη.
Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στις συνθέσεις του d και στα υποσύνολα του $[d-1]$. Έστω $\mathrm{Comp}(d)$ το σύνολο των συνθέσεων του d και $2^{[d-1]}$ το σύνολο των υποσυνόλων του $[d-1]$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $S : \mathrm{Comp}(d) \to 2^{[d-1]}$
$a \longmapsto S_a = \{a_1, a_1 + a_2, \cdots, a_1 + \cdots + a_{k-1}\}$ για $a = (a_1, a_2, \cdots a_k) \vDash d$
Η S είναι 1-1 και επί, με αντίστροφη την $\mathrm{co} : 2^{[d-1]} \longrightarrow \mathrm{Comp}(d)$
$S \longmapsto \mathrm{co}(S) = (r_1, r_2 - r_1, \cdots, d - r_{k-1})$ για $S = \{r_1 < r_2 < \cdots < r_{k-1}\} \subseteq [d-1]$.
Επομένως προκύπτει ότι το πλήθος των συνθέσεων του d είναι 2^{d-1}. Για $d = 3$ έχουμε:
$(3) \longmapsto \emptyset$, $(2,1) \longmapsto \{2\}$, $(1,2) \longmapsto \{1\}$, $(1,1,1) \longmapsto \{1,2\}$
Με Comp συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συνθέσεων.

Ορισμός 1.1.4. Ασθενής σύνθεση του $d \in \mathbb{N}$ ονομάζεται μια ακολουθία $a = (a_1, a_2, \cdots)$ μη αρνητικών ακεραίων τέτοια ώστε $a_1 + a_2 + \cdots = d$.

Ορισμός 1.1.5. Διαμέριση π ενός συνόλου S λέμε ένα σύνολο μη κενών, ξένων ανά δύο υποσυνόλων του που έχουν ένωση το S. Συμβολίζουμε με $|\pi|$ το πλήθος των μερών της π.

1.2 Μερικές Διατάξεις

Θα αναφερθούμε συνοπτικά σε κάποια στοιχεία από τη θεωρία των μερικών διατάξεων που θα μας χρειαστούν παρακάτω. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [28].

Ορισμός 1.2.1. Μια διμελής σχέση $\leq_P$ στο σύνολο P λέγεται μερική διάταξη αν ισχύουν:

1. $a \leq_P a$
2. $a \leq_P b$ και $b \leq_P a \Rightarrow a = b$
3. $a \leq_P b$ και $b \leq_P c \Rightarrow a \leq_P c$

για κάθε $a, b, c \in P$

Το $(P, \leq_P)$ ονομάζεται μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με πεπερασμένα μερικώς διατεταγμένα σύνολα.
Έστω $A \subseteq P$ και μερική διάταξη $\leq_A$ στο A τέτοια ώστε $a \leq_A b$ αν $a, b \in A$ και $a \leq_P b$. Η $\leq_A$ λέγεται η επαγόμενη μερική διάταξη της $\leq_P$ στο A και το $(A, \leq_A)$ λέγεται επαγόμενο μερικώς διατεταγμένο υποσύνολο του $(P, \leq_P)$.
Έστω $a, b \in P$. Τα a, b λέγονται P-συγκρίσιμα αν $a \leq_P b$ ή $b \leq_P a$. Συμβολίζουμε $a \parallel_P b$ αν τα a, b δεν είναι P-συγκρίσιμα. Αν $a < b$ και δεν υπάρχει στοιχείο $c \in P$ με $a < c < b$ λέμε ότι το b καλύπτει a.
Αν υπάρχει μέγιστο στοιχείο του P με βάση την μερική διάταξη $\leq_P$ το συμβολίζουμε με $\hat{1}$, ενώ αν υπάρχει ελάχιστο στοιχείο το συμβολίζουμε με $\hat{0}$.

Ορισμός 1.2.2.

1. Αν το P είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο, μπορούμε να ορίσουμε μερική διάταξη $\leq_{P^*}$ με $x \leq_{P^*} y$ ανν $x \geq_P y$, για κάθε $x, y \in P$. Το $P^* = (P, \leq_{P^*})$ ονομάζεται δυικό του P.
2. Αν P, Q είναι ξένα μερικώς διατεταγμένα σύνολα ορίζουμε μερική διάταξη $\leq_{P+Q}$ στο $P \cup Q$ με $x \leq_{P+Q} y$ ανν $x, y \in P$ και $x \leq_P y$ ή $x, y \in Q$ και $x \leq_Q y$. Συμβολίζουμε $P + Q = (P \cup Q, \leq_{P+Q})$.
3. Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο P λέγεται αλυσίδα αν κάθε δύο στοιχεία του είναι P-συγκρίσιμα. Συμβολίζουμε με $C_d = 1 < 2 < \cdots < d$ την αλυσίδα με d στοιχεία.
4. Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο P λέγεται αντιαλυσίδα αν για κάθε $a, b \in P$ με $a \neq b$ ισχύει $a \parallel_P b$.

Παράδειγμα 1.2.3. Έστω $q \in \mathbb{N}$. Δίνουμε στο σύνολο $2^{[q]}$ δομή μερικώς διατεταγμένου συνόλου με την διάταξη του εγκλεισμού και το συμβολίζουμε με B_q (άλγεβρα Boole). Το B_q έχει μέγιστο στοιχείο το $[q]$ και ελάχιστο στοιχείο το $\emptyset$.

Παράδειγμα 1.2.4. Θα ορίσουμε δύο μερικές διατάξεις στο σύνολο $\mathrm{Par}(d)$. Για λ, μ διαμερίσεις του d γράφουμε:

1. $\lambda \trianglelefteq \mu$ αν $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \leq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i$ για κάθε $i \geq 1$ (διάταξη κυριαρχίας)

2. $\lambda <_{\text{rlex}} \mu$ αν $\lambda_i = m_i$ για $i < j$ και $\lambda_j < \mu_j$ για κάποιο δείκτη j (αντίστροφη λεξικογραφική διάταξη)

Τότε ισχύουν τα εξής:

- $\lambda \trianglelefteq \mu \Rightarrow \lambda \leq_{\text{rlex}} \mu$
- Το $(\text{Par}(d)), \leq_{\text{rlex}})$ είναι αλυσίδα
- $\lambda \trianglelefteq \mu \Leftrightarrow \lambda' \trianglerighteq \mu'$

Έστω τώρα P μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Συμβολίζουμε με $h(P)$ το μέγιστο πλήθος στοιχείων μιας αλυσίδας του. Το $h(P)$ ονομάζεται ύψος του P. Για $x \in P$ έστω $h(x)$ το μέγιστο πλήθος στοιχείων m μιας αλυσίδας $x_1 <_P x_2 <_p \cdots <_P x_m = x$ με μέγιστο στοιχείο το x. Η συνάρτηση $h : P \to [h(P)]$ ονομάζεται συνάρτηση ύψους του P και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Αν $x <_P y$ τότε $h(x) < h(y)$
2. Η h είναι επί
3. Αν $x \in P$ με $h(x) \geq 2$ υπάρχει $y \in P$ με $h(y) = h(x) - 1$ και $y < x$.
4. $h(x) = \max\{h(y) + 1 : y < x\}$

Για $i = 1, 2, \cdots, h(P)$ έστω $L_i = \{x \in P : h(x) = i\}$. Το $\{L_1, L_2, \cdots, L_{h(P)}\}$ είναι διαμέριση του P σε αντιαλυσίδες και ονομάζεται η διαμέριση του P σε επίπεδα. Το L_1 αποτελείται από τα ελαχιστικά στοιχεία του P, το L_2 από τα ελαχιστικά στοιχεία του $P \setminus L_1$ κλπ.
Αν όλες οι μεγιστικές αλυσίδες του P έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, το P ονομάζεται διαβαθμισμένο και λέμε ότι έχει συνάρτηση τάξης $\rho = h - 1$. Είναι σαφές ότι για κάθε ελαχιστικό στοιχείο x του P ισχύει $\rho(x) = 0$, ενώ αν το $x < y$ είναι σχέση κάλυψης ισχύει $\rho(y) = \rho(x) + 1$. Το $h(P) - 1$ ονομάζεται τάξη του P.

Ορισμός 1.2.5. Έστω πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P. Η συνάρτηση Möbius $\mu_P : \{(s,t) : s \leq_P t\} \to \mathbb{Z}$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής:
$\mu_P(s,s) = 1$ για $s \in P$
$\mu_P(s,t) = -\sum\limits_{s \leq u < t} \mu_P(s,u)$ για $s <_P t$

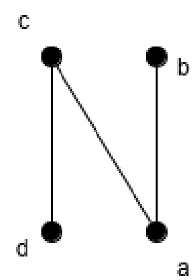
Για την άλγεβρα Boole B_q ισχύει $\mu_{B_q}(s,t) = (-1)^{\#(t \setminus s)}$ για $s \subseteq t \subseteq [q]$.

Θεώρημα 1.2.6.

- (Αντιστροφή Möbius)
  Έστω P πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο, R μεταθετική $\mathbb{Q}$-άλγεβρα και $f, g : P \to R$. Τότε $g(t) = \sum\limits_{s \geq t} f(s)$ για κάθε $t \in P$ ανν $f(t) = \sum\limits_{s \geq t} g(s)\mu_P(t,s)$ για κάθε $t \in P$

- (Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, ειδική περίπτωση της Αντιστροφής Möbius)
  Έστω R μεταθετική $\mathbb{Q}$-άλγεβρα και $f, g : 2^{[d]} \to R$.
  Τότε $g(t) = \sum_{t \subseteq s} f(s)$ για κάθε $t \subseteq [d]$ ανν $f(t) = \sum_{t \subseteq s} (-1)^{\#(s \setminus t)} g(s)$ για κάθε $t \subseteq [d]$

Θα δούμε τώρα κάποια στοιχεία από τη θεωρία των (P, ω)-διαμερίσεων, που θα μας χρειαστούν παρακάτω.
Έστω P μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Επιγραφή του P ονομάζεται μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\omega : P \to [d]$. Για παράδειγμα για το μερικώς διατεταγμένο σύνολο του σχήματος, ορίζουμε επιγραφή ω με $\omega(a) = 1, \omega(b) = 3, \omega(c) = 4, \omega(d) = 2$.



Σχήμα 1.1: P

Ορισμός 1.2.7. Έστω P μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $\omega : P \to [d]$ μια επιγραφή του. Αντίστροφη (P, ω)-διαμέριση ονομάζεται μια συνάρτηση $\sigma : P \to \mathbb{N}$ που ικανοποιεί τα εξής:

1. $s <_P t \Rightarrow \sigma(s) \leq \sigma(t)$

2. $s <_P t$ και $\omega(s) >_{\mathbb{N}} \omega(t) \Rightarrow \sigma(s) < \sigma(t)$

Συμβολίζουμε με $A^r(P, \omega)$ το σύνολο των αντίστροφων (P, ω)-διαμερίσεων.
Για P και ω όπως πριν έχουμε
$A^r(P, \omega) = \{\sigma : \{a, b, c, d\} \to \mathbb{N} : \sigma(a) \leq \sigma(c), \sigma(a) \leq \sigma(b), \sigma(d) \leq \sigma(c)\}$

Ορισμός 1.2.8. Έστω P μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $\omega : P \to [d]$ μια επιγραφή του. Γραμμική επέκταση του (P, ω) ονομάζεται μια μετάθεση $a = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$ του $[d]$ με την ιδιότητα αν $\omega^{-1}(a_i) <_P \omega^{-1}(a_j)$ τότε $i < j$. Δηλαδή η a είναι μια διάταξη των επιγραφών του P, στην οποία αν $x <_P y$ τότε το $\omega(x)$ εμφανίζεται αριστερά του $\omega(y)$ για $x, y \in P$.

Το σύνολο όλων των γραμμικών επεκτάσεων του (P, ω) ονομάζεται σύνολο Jordan - Holder και συμβολίζεται με $L(P, \omega)$.
Στο προηγούμενο παράδειγμα ισχύει $L(P, \omega) = \{1324, 1234, 2134, 1243, 2143\}$

Ορισμός 1.2.9. Έστω $w \in \mathfrak{S}_d$ και $f : [d] \to \mathbb{N}$. Η f ονομάζεται αντιστρόφως w-συμβατή αν:

- $f(w_1) \leq f(w_2) \leq \cdots \leq f(w_d)$

- $w_i > w_{i+1} \Rightarrow f(w_i) < f(w_{i+1})$

Συμβολίζουμε με $A^r(w)$ το σύνολο όλων των αντιστρόφως w-συμβατών συναρτήσεων. Τότε

$$\mathbb{N}^{[d]} = \biguplus_{w \in \mathfrak{S}_d} A^r(w)$$

δηλαδή κάθε συνάρτηση $f : [d] \to \mathbb{N}$ είναι αντιστρόφως w-συμβατή για μοναδική μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_d$.
Έστω $\sigma : P \to \mathbb{N}$. Ορίζουμε $\sigma' : [d] \to \mathbb{N}$ με $\sigma'(i) = \sigma(\omega^{-1}(i))$. Αν $w \in \mathfrak{S}_d$ θα λέμε ότι η σ είναι αντιστρόφως w-συμβατή αν η σ' είναι αντιστρόφως w-συμβατή. Συμβολίζουμε με $S^r(w)$ το σύνολο όλων των $\sigma \in A^r(P, \omega)$ που είναι αντιστρόφως w-συμβατές.

Πρόταση 1.2.10.

$$A^r(P, \omega) = \biguplus_{w \in L(P,\omega)} S^r(w)$$

Δηλαδή κάθε αντίστροφη (P, ω)—διαμέριση είναι αντιστρόφως w-συμβατή για μοναδική γραμμική επέκταση w του (P, ω).
Απόδειξη
Έστω $\sigma : P \to [d]$. Υπάρχει μοναδική $w \in \mathfrak{S}_d$, τέτοια ώστε η σ να είναι αντιστρόφως w-συμβατή. Θα δείξουμε ότι $\sigma \in A^r(P, \omega)$ ανν $w \in L(P, \omega)$.
Ισχύουν τα εξής: $w = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$
$\sigma'(a_1) = \sigma'(a_2) = \cdots = \sigma'(a_{k_1}) < \sigma'(a_{k_1+1}) = \cdots = \sigma'(a_{k_1+k_2}) < \cdots$
$a_1 <_{\mathbb{N}} a_2 <_{\mathbb{N}} \cdots <_{\mathbb{N}} a_{k_1}$, $a_{k_1+1} <_{\mathbb{N}} \cdots <_{\mathbb{N}} a_{k_1+k_2}$ κ.ο.κ.

1. Υποθέτουμε ότι $\sigma \in A^r(P, \omega)$. Έστω $\omega^{-1}(a_i) <_P \omega^{-1}(a_j)$. Θα δείξουμε ότι $i < j$. Αφού $\sigma \in A^r(P, \omega)$ έπεται ότι $\sigma(\omega^{-1}(a_i)) \leq \sigma(\omega^{-1}(a_j))$, δηλαδή $\sigma'(a_i) \leq \sigma'(a_j)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

    - $\sigma'(a_i) < \sigma'(a_j)$. Τότε $i < j$
    - $\sigma'(a_i) = \sigma'(a_j)$. Αφού $\sigma(\omega^{-1}(a_i)) = \sigma(\omega^{-1}(a_j))$, $\omega^{-1}(a_i) <_P \omega^{-1}(a_j)$ και η σ είναι αντίστροφη (P, ω)-επιγραφή, έπεται ότι $a_i < a_j$. Αφού $\sigma'(a_i) = \sigma'(a_j)$ και $a_i < a_j$ έπεται ότι $i < j$.

2. Υποθέτουμε ότι $w \in L(P, \omega)$. Έστω $p <_P q$. Τότε $\omega(p) = a_i$ και $\omega(q) = a_j$ για κάποια i, j. Αφού η w είναι γραμμική επέκταση του (P, ω), έπεται ότι $i < j$, άρα $\sigma'(a_i) \leq \sigma'(a_j)$, δηλαδή $\sigma(p) \leq \sigma(q)$. Αν επιπλέον $\omega(p) > \omega(q)$, ισχύει $\sigma(p) > \sigma(q)$. Πράγματι, αν $\sigma(p) = \sigma(q)$ θα είχαμε $\sigma'(a_i) = \sigma'(a_j)$ και $i < j$ άρα $a_i < a_j$.

$\square$

Στο παράδειγμά μας έχουμε $A^r_w = S^r_{1324} \cup S^r_{1234} \cup S^r_{2134} \cup S^r_{1243} \cup S^r_{2143}$
όπου για παράδειγμα $S^r_{1324} = \{\sigma : \{a, b, c, d\} \to \mathbb{N} \mid \sigma(a) \leq \sigma(b) < \sigma(d) \leq \sigma(c)\}$.

1.3 Γραφήματα

Θα αναφερθούμε σε κάποιες βασικές έννοιες της θεωρίας γραφημάτων. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [33].

Ορισμός 1.3.1. Γράφημα ονομάζεται μια τριάδα $G = (V, E, \varphi)$, όπου V και E είναι σύνολα και $\varphi : E \to \{\{a, b\} : a, b \in V\}$ είναι συνάρτηση. Το V ονομάζεται σύνολο κορυφών του G, το E σύνολο ακμών και αν $\varphi(e) = \{a, b\}$ για κάποια ακμή e, οι κορυφές a, b ονομάζονται άκρα της e.

Για τα επόμενα θα ασχοληθούμε μόνο με απλά, δηλαδή χωρίς θηλιές ή πολλαπλές ακμές, και πεπερασμένα γραφήματα. Για κάθε $e \in E$ θα ταυτίζουμε την e με το $\varphi(e)$, άρα μπορούμε να θεωρούμε το E ως υποσύνολο του $\binom{V}{2}$ και να γράφουμε $G = (V, E)$.

Ορισμός 1.3.2.

1. Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και $A \subseteq V$. Το γράφημα με σύνολο κορυφών A και σύνολο ακμών $\{\{x, y\} : x, y \in A, \{x, y\} \in E\}$ ονομάζεται επαγόμενο υπογράφημα του G στο A.

2. Συνεκτικό ονομάζεται ένα γράφημα όταν για οποιεσδήποτε δύο κορυφές του x, y υπάρχει περίπατος από το x στο y, δηλαδή ακμές $e_1, e_2, \cdots, e_k$ και κορυφές $x_1, \cdots, x_{k-1}$ τέτοιες ώστε $e_1 = \{x, x_1\}, e_2 = \{x_1, x_2\}, \cdots, e_k = \{x_{k-1}, y\}$.

3. Συνεκτική συνιστώσα ενός γραφήματος ονομάζεται κάθε μεγιστικό επαγόμενο συνεκτικό υπογραφήμά του. Συμβολίζουμε με $c(G)$ το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών ενός γραφήματος G.

4. Ένα υποσύνολο A του $V(G)$ ονομάζεται συνεκτικό αν το επαγόμενο υπογράφημα του G στο A είναι συνεκτικό. Συμβολίζουμε με L_G το σύνολο όλων των διαμερίσεων του $V(G)$ σε συνεκτικά υποσύνολα και του δίνουμε δομή μερικώς διατεταγμένου συνόλου με τη σχέση της εκλέπτυνσης. Αποδεικνύεται ότι ο L_G είναι γεωμετρικός σύνδεσμος με συνάρτηση τάξης $\rho(\pi) = d - |\pi|$ και έχει ελάχιστο στοιχείο $\hat{0} = \{\{v_1\}, \cdots, \{v_d\}\}$ και μέγιστο στοιχείο $\hat{1}$ τη διαμέριση του $V(G)$ σε συνεκτικές συνιστώσες. Άρα είναι τάξης $d - c(G)$ και ισχύει $(-1)^{d-|\pi|}\mu_{L_G}(\hat{0}, \pi) > 0$ για κάθε $\pi \in L_G$.

5. Ένα υποσύνολο A του $V(G)$ λέγεται ανεξάρτητο ή ευσταθές αν δεν υπάρχουν ακμές που να έχουν και τις δύο κορυφές τους στο A. Μια διαμέριση του $V(G)$ σε ανεξάρτητα υποσύνολα ονομάζεται ευσταθής διαμέριση του G.

6. Αν υπάρχει ευσταθής διαμέριση του G με δύο μέρη, τότε το G ονομάζεται διμερές γράφημα.

7. Έστω $V = A \cup B$ όπου τα A, B είναι ξένα μεταξύ τους σύνολα με r και s στοιχεία αντίστοιχα. Το απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών V με ακμές $\{a, b\}$ για κάθε $a \in A, b \in B$ ονομάζεται πλήρες διμερές γράφημα και συμβολίζεται με $K_{r,s}$.

8. Ταίριασμα του γραφήματος $G = (V, E)$ ονομάζεται ένα υποσύνολο F του E τέτοιο ώστε κάθε $v \in V$ είναι άκρη το πολύ μιας ακμής που ανήκει στο F. Αν $r \leq s$ το πλήθος των ταιριασμάτων του $K_{r,s}$ με r ακμές είναι $s(s-1)\cdots(s-r+1)$.

9. Το γράφημα με σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, \cdots, v_d\}$ και ακμές $\{v_i, v_{i+1}\}$ για $i = 1, 2, \cdots, d-1$ ονομάζεται μονοπάτι μήκους $d-1$ και συμβολίζεται με P_d. Το γράφημα στο ίδιο σύνολο κορυφών που έχει επιπλέον την ακμή $\{v_1, v_d\}$ ονομάζεται κύκλος μήκους d και συμβολίζεται με C_d.

10. Αν κάθε κορυφή ενός γραφήματος έχει βαθμό το πολύ 2, όλες οι συνεκτικές συνιστώσες του είναι κύκλοι ή μονοπάτια.

11. Έστω γράφημα K_d με σύνολο κορυφών $[d]$ στο οποίο οι κορυφές του συνδέονται ανά δύο με ακμή. Το K_d ονομάζεται κλίκα ή πλήρες απλό γράφημα.

12. Έστω G, H δύο γραφήματα με ξένα σύνολα κορυφών. Συμβολίζουμε με $G + H$ το γράφημα με σύνολο κορυφών $V(G) \cup V(H)$ και σύνολο ακμών $E(G) \cup E(H)$.

13. Έστω P μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Συμβολίζουμε με $\mathrm{inc}(P)$ το γράφημα με σύνολο κορυφών P και σύνολο ακμών $\{\{a, b\} : a \parallel_P b\}$.

Ορισμός 1.3.3. Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και $e = \{a, b\} \in E(G)$. Προσανατολισμός της e ονομάζεται η επιλογή μίας από τις κορυφές a, b ως αρχικής κορυφής της e. Προσανατολισμός του G ονομάζεται μια επιλογή προσανατολισμού για κάθε ακμή του G.

Ορισμός 1.3.4. Έστω o προσανατολισμός του G

1. Ένας περίπατος $w = (v_0, e_1, v_1, \cdots, e_l, v_l)$ ονομάζεται προσανατολισμένος ως προς τον o, αν με τον προσανατολισμό o κάθε ακμή e_i έχει αρχή το v_{i-1} και πέρας το v_i.

2. Ένας κλειστός περίπατος που είναι προσανατολισμένος ως προς τον o, λέγεται κύκλος του o.

3. Ο o λέγεται άκυκλος αν δεν έχει κύκλο. Συμβολίζουμε με $AO(G)$ το σύνολο όλων των άκυκλων προσανατολισμών του G.

4. Μια κορυφή $v \in V$ λέγεται βύθισμα (sink) (1ης τάξης) ενός άκυκλου προσανατολισμού o, αν δεν υπάρχει ακμή $e = \{v, u\}$, με αρχική κορυφή την v, για τον o. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Sink}(o)$ το σύνολο των βυθισμάτων του o και με $\mathrm{sink}(o)$ το πλήθος τους. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Sink}(G, j)$ το σύνολο των άκυκλων προσανατολισμών του G με j βυθίσματα και με $\mathrm{sink}(G, j)$ το πλήθος τους.

5. Έστω ότι έχουμε αφαιρέσει όλα τα βυθίσματα ενός άκυκλου προσανατολισμού. Τα βυθίσματα του προσανατολισμένου γραφήματος που απομένει ονομάζονται βυθίσματα 2ης τάξης του G. Όμοια ορίζουμε τα βυθίσματα i τάξης του G, για $i = 1, 2, \cdots$. Αν ο o έχει a_i βυθίσματα τάξης i, για $i = 1, 2, \cdots$ ονομάζουμε την $(a_1, a_2, \cdots)$ ακολουθία βυθισμάτων του o.

Ορισμός 1.3.5.

1. Δέντρο ονομάζεται ένα άκυκλο και συνεκτικό γράφημα. Αν ένα δέντρο έχει d κορυφές και q ακμές, ισχύει η σχέση $q = d - 1$.

2. Δάσος ονομάζεται ένα άκυκλο γράφημα, δηλαδή ένα γράφημα που κάθε συνεκτική του συνιστώσα είναι δέντρο. Αν ένα δάσος έχει d κορυφές, q ακμές και m συνεκτικές συνιστώσες ισχύει η σχέση $q = d - m$.

1.4 Το Χρωματικό Πολυώνυμο

Έστω G απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών $V(G) = V$ με σύνολο ακμών $E(G) = E \subseteq \binom{V}{2}$ για τα οποία ισχύει $\#V = d$ και $\#E = q$.

Ορισμός 1.4.1.

1. Χρωματισμός του G ονομάζεται μια συνάρτηση $\kappa : V \to \mathbb{P} = \{1, 2, \cdots\}$. Ένας χρωματισμός λέγεται γνήσιος αν για κάθε ακμή $\{u, v\} \in E$ ισχύει $\kappa(u) \neq \kappa(v)$. Ισοδύναμα, αν τα μη κενά στοιχεία του συνόλου $\{\kappa^{-1}(n) : n \in \mathbb{P}\}$ αποτελούν ευσταθή διαμέριση του G.

2. Ένας χρωματισμός κ ονομάζεται $n-$χρωματισμός αν $\mathrm{im}(\kappa) \subseteq [n]$.

3. Ο μικρότερος ακέραιος n για τον οποίο υπάρχει γνήσιος $n-$χρωματισμός του G ονομάζεται χρωματικός αριθμός του G και συμβολίζεται με $\chi(G)$.

Έστω κ γνήσιος χρωματισμός του G. Για $i \in \mathbb{P}$ θέτουμε $A_i(\kappa) = \{x \in V : \kappa(x) = i\}$ και $a_i(\kappa) = \#A_i(\kappa)$. Η ασθενής σύνθεση $a(\kappa) = (a_1(\kappa), a_2(\kappa), \cdots)$ του d λέγεται τύπος του κ. Συμβολίζουμε με $K(G)$ το σύνολο όλων των γνήσιων χρωματισμών του G και με $K_a(G)$ το σύνολο των γνήσιων χρωματισμών του G τύπου a, για a ασθενή σύνθεση του d.

Ορισμός 1.4.2. Το πλήθος των γνήσιων n-χρωματισμών του G συμβολίζεται με $\chi_G(n)$. Η συνάρτηση $n \mapsto \chi_G(n)$ ονομάζεται χρωματικό πολυώνυμο του G.

Επομένως ο μικρότερος θετικός ακέραιος n για τον οποίο $\chi_G(n) \neq 0$ είναι ο $\chi(G)$.

Παράδειγμα 1.4.3.

1. Για το πλήρες γράφημα ισχύει $\chi_{K_d}(n) = n(n-1)\cdots(n-d+1)$

2. Για το γράφημα G με d κορυφές που δεν συνδέονται μεταξύ τους με ακμές, ισχύει $\chi_G(n) = n^d$

3. Για τον κύκλο μήκους 4 ισχύει $\chi_{C_4} = n(n-1)^2 + n(n-1)(n-2)^2 = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 3n$

4. Έστω G δάσος με d κορυφές και m συνεκτικές συνιστώσες.
Τότε $x_G(n) = n^m(n-1)^{d-m}$

Θα δούμε τώρα συνοπτικά κάποιες ιδιότητες του χρωματικού πολυωνύμου.

- $$\chi_G(n) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i n(n-1)\cdots(n-i+1)$$
  όπου α_i είναι το πλήθος των ευσταθών διαμερίσεων του G με i μέρη. Άρα το $\chi_G(n)$ είναι μονικό πολυώνυμο στο n βαθμού d, με ακέραιους συντελεστές και ο συντελεστής του n^{d-1} είναι ίσος με $-q$.

- $$\chi_G(n) = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{\#S} n^{C(S)}$$
  όπου $C(S)$ είναι το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος $G_S = (V(G), S)$, άρα η μεγαλύτερη δύναμη του n που διαιρεί το $\chi_G(n)$ είναι το $n^{c(G)}$.

- (Whitney 1932)
  $$\chi_G(n) = \sum_{\pi \in L_G} \mu_{L_G}(\hat{0}, \pi) n^{|\pi|}$$
  Άρα τα πρόσημα των συντελεστών του χρωματικού πολυωνύμου εναλλάσσονται.

- (λήμμα διαγραφής-συστολής)
  $$\chi_G(n) = \chi_{G \setminus e}(n) - \chi_{G/e}(n)$$
  όπου $e \in E(G)$ και $G \setminus e$ και G/e τα γραφήματα που προκύπτουν με διαγραφή και συστολή της e αντίστοιχα. Διαγραφή της e είναι η αφαίρεση της ακμής e και συστολή της e είναι η αντικατάσταση των άκρων της με μια καινούρια κορυφή, η οποία συνδέεται με ακμή με κάποια άλλη κορυφή, αν και μόνο αν ένα από τα άκρα της e συνδέεται με αυτή την κορυφή.

- Αν στην θέση του n βάλουμε το $-n$ και πολλαπλασιάσουμε με $(-1)^d$ προκύπτει το πολυώνυμο $\displaystyle\sum_{\pi \in L_G} |\mu_{L_G}(\hat{0}, \pi)| n^{|\pi|}$, που παίρνει μη αρνητικές τιμές για $n = 1, 2, \cdots$.
  Θα δούμε τώρα μια συνδυαστική ερμηνεία αυτού του πολυωνύμου, που οφείλεται στον Stanley[26]. Για τον σκοπό αυτό του θα περιγράψουμε πρώτα μια εναλλακτική συνδυαστική ερμηνεία του $\chi_G(n)$.
  Έστω κ χρωματισμός του G και o άκυκλος προσανατολισμός. Θα λέμε ότι ο κ είναι o-σύμφωνος αν $(v, u) \in o \Rightarrow \kappa(v) > \kappa(u)$. Αν ένας χρωματισμός κ είναι σύμφωνος με κάποιον άκυκλο προσανατολισμό, τότε είναι γνήσιος. Επιπλέον, κάθε γνήσιος χρωματισμός είναι σύμφωνος με μοναδικό άκυκλο προσανατολισμό, άρα το $\chi_G(n)$ είναι ίσο με το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών (o, κ), όπου ο o είναι άκυκλος προσανατολισμός του G και ο κ είναι o-σύμφωνος n-χρωματισμός του G. Θα λέμε τώρα ότι ένας χρωματισμός κ είναι o-συμβατός, για κάποιον άκυκλο προσανατολισμό o, αν $(v, u) \in o \Rightarrow \kappa(v) \geq \kappa(u)$. Τότε το $(-1)^d \chi_G(-n)$ είναι ίσο με το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών (o, κ), όπου ο o είναι άκυκλος προσανατολισμός του G και ο κ είναι o-συμβατός n-χρωματισμός του G. Ειδικότερα το $(-1)^d \chi_G(-1)$ ισούται με το πλήθος των άκυκλων προσανατολισμών του G.

- Το $(-1)^{d-1}[n]\chi_G(n)$ είναι ίσο με το πλήθος των άκυκλων προσανατολισμών του G με μοναδικό βύθισμα το v, για τυχαία κορυφή v του G.

1.5 $(3+1)$-Ελεύθερα Μερικώς Διατεταγμένα Σύνολα

Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο P ονομάζεται $(a+b)$-ελεύθερο αν δεν περιέχει επαγόμενο μερικώς διατεταγμένο υποσύνολο ισόμορφο με το $C_a + C_b$. Τα $(3+1)$-ελεύθερα μερικώς διατεταγμένα σύνολα παίζουν σημαντικό ρόλο στην θεωρία των χρωματικών συμμετρικών συναρτήσεων. Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε μια χρήσιμη αναπαράσταση τους, που δόθηκε από τους Guay-Paquet, Morales και Rowland[14].
Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι $(3+1)$-ελεύθερο ανν ικανοποιεί την εξής ιδιότητα:

$$x, y, z, w \in P \text{ με } x < y < z \Rightarrow w > x \text{ ή } w < z \tag{1.1}$$

Πρόταση 1.5.1. Έστω P ένα $(3+1)$-ελεύθερο μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $a, b \in P$ με $a \,||_p\, b$. Τότε τα a, b ανήκουν στο ίδιο ή σε διαδοχικά επίπεδα του P.
Απόδειξη
Έστω ότι $a \in L_i$ και $b \in L_j$. Υποθέτουμε ότι $i - j \geq 2$. Τότε υπάρχουν $k \in L_{i-1}$ και $l \in L_{i-2}$ τέτοια ώστε $l < k < a$. Από την (1.1) έπεται ότι $b > l$ άρα $j > i - 2$. Άτοπο.

□

Ορισμός 1.5.2. Δίχρωμο γράφημα ονομάζεται ένα ζεύγος (G, κ) όπου G γράφημα και κ γνήσιος 2-χρωματισμός του G. Το $B = \kappa^{-1}(\{1\})$ ονομάζεται βάση και το $T = \kappa^{-1}(\{2\})$ ονομάζεται κορυφή του P.

Θεωρούμε το αλφάβητο $\Sigma = \{u_i : i \in \mathbb{P}\} \cup \{b_{i,i+1}(G) : i \in \mathbb{P}, G \text{ δίχρωμο γράφημα}\}$
όπου το σύμβολο u_i αντιστοιχεί σε μια κορυφή στο επίπεδο i και το σύμβολο $b_{i,i+1}(G)$ αντιστοιχεί σε ένα αντίγραφο του G στα επίπεδα i και $i+1$.
Μια λέξη (πεπερασμένη ακολουθία) L στο αλφάβητο Σ ονομάζεται λίστα μερών.
Έστω $V = V(L)$ το σύνολο των κορυφών που αντιστοιχούν στην L. Ορίζουμε μερική διάταξη $\leq_L$ στο $V(L)$. Αν $x, y \in V(L)$ θέτουμε $x <_L y$ όταν:

- Το x βρίσκεται τουλάχιστον δύο επίπεδα κάτω από το y
- Το x βρίσκεται ακριβώς ένα επίπεδο κάτω από το y και το μέρος του x εμφανίζεται αριστερά από το μέρος του y
- Το x βρίσκεται ακριβώς ένα επίπεδο κάτω από το y και συνδέονται με ακμή ενός δίχρωμου γραφήματος

Συμβολίζουμε $P_L = (V(L), \leq_L)$ και λέμε ότι η L είναι μια αναπαράσταση του P_L.

Πρόταση 1.5.3. Η $\leq_L$ είναι πράγματι μερική διάταξη και το P_L είναι $(3+1)$-ελεύθερο.
Απόδειξη
Αν $x < y$ το x θα βρίσκεται σε χαμηλότερο επίπεδο από το y. Άρα δεν μπορούμε να έχουμε $x < y$ και $y < x$ για κάποια $x, y \in V(L)$. Έστω $x < y$ και $y < z$. Τότε το x θα βρίσκεται τουλάχιστον δύο επίπεδα κάτω από το z, άρα $x < z$.
Έστω $x < y < z$ και w μη συγκρίσιμο με τα x, y, z. Λόγω της ιδιότητας 1, τα y, w βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο i, το x στο $i-1$ και το z στο $i+1$. Αφού $x < y$ και βρίσκονται σε διαδοχικά επίπεδα, είτε θα ανήκουν στο ίδιο μέρος είτε το μέρος του x θα εμφανίζεται αριστερά από το μέρος του y. Όμοια για τα y, z.

- Έστω ότι το μέρος του y εμφανίζεται αριστερά από το μέρος του w στην L. Τότε το x βρίσκεται ακριβώς ένα επίπεδο κάτω από το w και το μέρος του εμφανίζεται αριστερά από το μέρος του w, άρα $x < w$. Άτοπο

- Έστω ότι το μέρος του y εμφανίζεται δεξιά από το μέρος του w στην L. Τότε το z βρίσκεται ακριβώς ένα επίπεδο πάνω από το w και το μέρος του εμφανίζεται δεξιά από το μέρος του w, άρα $z > w$. Άτοπο

Άρα το y ανήκει στο ίδιο μέρος με το w.

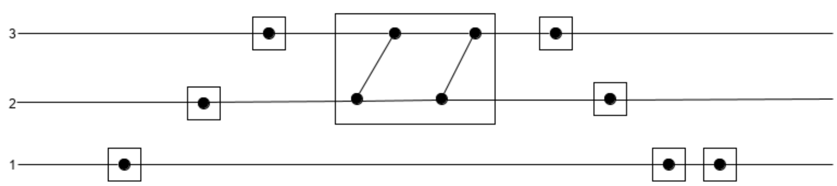
- Αν το μέρος του x εμφανίζεται αριστερά από το μέρος του y, θα έχουμε $x < w$. Άτοπο, άρα το x ανήκει στο ίδιο μέρος με το y

- Αν το μέρος του z εμφανίζεται δεξιά από το μέρος του y, θα έχουμε $z > w$. Άτοπο, άρα το w ανήκει στο ίδιο μέρος με το y

Το x βρίσκεται δύο επίπεδα κάτω από το z και ανήκουν στο ίδιο μέρος. Άτοπο.

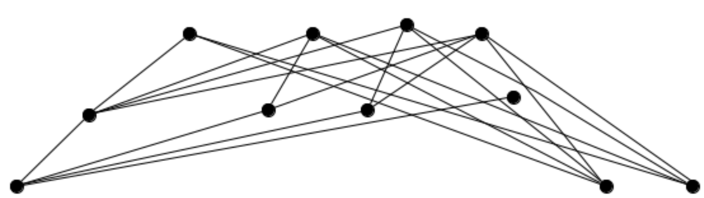
□

Για παράδειγμα αν έχουμε την λέξη $L = u_1u_2u_3b_{2,3}(G)u_3u_2u_1u_1$



Σχήμα 1.2: L

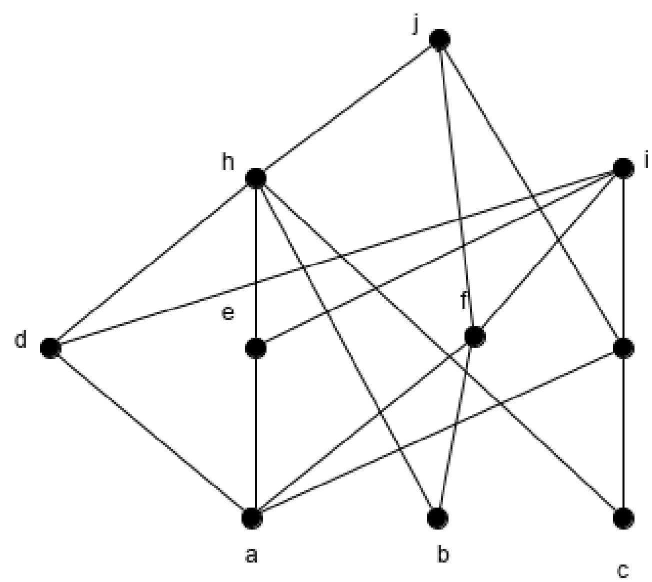
προκύπτει το εξής μερικώς διατεταγμένο σύνολο



Σχήμα 1.3: P_L

Θα δούμε τώρα ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε $(3+1)$-ελεύθερο μερικώς διατεταγμένο σύνολο έχει μια τέτοια αναπαράσταση:
Έστω P $(3+1)$-ελεύθερο μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Για $x \in P$ ορίζουμε:

- $U_x = \{y \in P : y > x\}$
- $D_x = \{y \in P : y < x\}$
- $v(x) = (D_x, P \setminus U_x)$



Σχήμα 1.4: P

Για το $(3+1)$-ελεύθερο μερικώς διατεταγμένο σύνολο του σχήματος έχουμε:

- $v(a) = (\emptyset, \{a, b, c\})$
- $v(b) = (\emptyset, \{a, b, c, d, e, g\})$
- $v(c) = (\emptyset, \{a, b, c, d, e, f\})$
- $v(d) = v(e) = (\{a\}, \{a, b, c, d, e, f, g\})$
- $v(f) = (\{a, b\}, \{a, b, c, d, e, f, g, h\})$
- $v(g) = (\{a, c\}, \{a, b, c, d, e, f, g, h\})$
- $v(h) = (\{a, b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\})$
- $v(i) = (\{a, b, c, d, e, f, g\}, \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\})$
- $v(j) = (\{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\})$

Θέτουμε $V(P) = \{v(x) : x \in P\}$. Για $x, z \in P$ έχουμε $v(x) \leq_{V(P)} v(z)$ ανν $D_x \subseteq D_z$ και $U_x \supseteq U_z$
Έστω $x, y \in P$. Συμβολίζουμε:

- $x \approx y$ αν $v(x) = v(y)$. Τότε λέμε ότι τα x και y είναι κλώνοι. Παρατηρούμε ότι τα x, y είναι κλώνοι ανν το $(x\,y)$ είναι αυτομορφισμός του P

- $x \upuparrows y$ αν $D_x \parallel D_y$. Τότε υπάρχει $z \in D_x \setminus D_y$ και $w \in D_y \setminus D_x$, άρα το επαγόμενο μερικώς διατεταγμένο σύνολο του P στο $\{x, y, z, w\}$ είναι ισόμορφο με το $C_2 + C_2$ με τα x και y στην κορυφή.

- $x \downdownarrows y$ αν $U_x \parallel U_y$. Τότε υπάρχει $z \in U_x \setminus U_y$ και $w \in U_y \setminus U_x$, άρα το επαγόμενο μερικώς διατεταγμένο σύνολο του P στο $\{x, y, z, w\}$ είναι ισόμορφο με το $C_2 + C_2$ με τα x και y στη βάση.

Τότε ισχύει το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 1.5.4.

1. $x \approx y$ και $y \approx z \Rightarrow x \approx z$
2. $x \upuparrows y$ και $y \approx z \Rightarrow x \upuparrows z$
3. $x \downdownarrows y$ και $y \approx z \Rightarrow x \downdownarrows z$
4. $x \upuparrows y \Rightarrow U_x = U_y$
5. $x \downdownarrows y \Rightarrow D_x = D_y$
6. $v(x) \parallel_{V(P)} v(y)$ ανν $x \upuparrows y$ ή $x \downdownarrows y$
7. Δεν γίνεται να ισχύει $x \upuparrows y$ και $y \downdownarrows z$
8. $x \approx y \rightarrow h(x) = h(y)$
9. $x \downdownarrows y \Rightarrow h(x) = h(y)$
10. $x \upuparrows y \Rightarrow h(x) = h(y)$

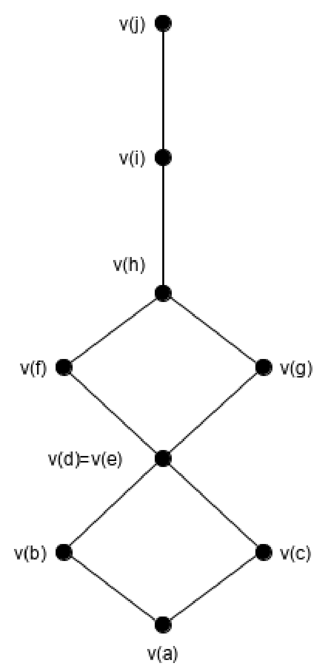
Θεωρούμε το γράφημα $G = \mathrm{inc}(V(P))$ στο σύνολο κορυφών $V(P)$. Τότε $\{v(x), v(y)\} \in E(G)$ ανν $x \upuparrows y$ ή $x \downdownarrows y$. Έστω $V_1 = \{v(x) : x \upuparrows y$ για κάποιο $y \in P\}$,
$V_2 = \{v(x) : x \downdownarrows y$ για κάποιο $y \in P\}$ και $V_3 = V(P) \setminus V_1 \cup V_2$.
Τότε τα V_1, V_2, V_3 είναι ξένα ανά δύο και το G είναι ξένη ένωση τριών γραφημάτων G_1, G_2, G_3 στα σύνολα κορυφών V_1, V_2, V_3 αντίστοιχα.

- Έστω $U \subseteq V_1$ συνεκτική συνιστώσα του G_1. Το σύνολο $\mathrm{A} = \{x : v(x) \in U\}$ λέγεται top of a tangle του P. Αν $x \in A$ θέτουμε $h(A) = h(x)$.

- Έστω $D \subseteq V_2$ συνεκτική συνιστώσα του G_2. Το σύνολο $\mathrm{B} = \{x : v(x) \in D\}$ λέγεται bottom of a tangle του P. Αν $x \in B$ θέτουμε $h(B) = h(x)$.

- Έστω $v(x) \in V_3$. Το σύνολο $C = \{y \ : v(y) = v(x)\}$ λέγεται σύνολο κλώνων του P. Θέτουμε $h(C) = h(x)$.

Λέμε ότι ένα top of a tangle A και ένα bottom of a tangle B ταιριάζουν αν υπάρχουν $x, y \in A$ και $z, w \in B$ ώστε $z < x, w < y$ και να μην υπάρχουν άλλες σχέσεις μεταξύ τους.
Έστω ένα top of a tangle A. Τότε υπάρχει μοναδικό bottom of a tangle B ώστε τα A, B να ταιριάζουν. Τότε το (A, B) λέγεται tangle του P και ισχύει $h(B) = h(A) + 1$. Συμβολίζουμε $h(T) = h(B)$.
Έστω $T_1 = (A_1, B_1), \cdots, T_m = (A_m, B_m)$ τα tangle του P και $C_1, \cdots, C_n$ τα σύνολα κλώνων του. Τα $C_1, \cdots, C_n$ και $T_1, \cdots, T_m$ λέγονται μέρη του P.



Σχήμα 1.5: $V(P)$

Άρα τα μέρη του P είναι: $C_1 = \{a\}$,$C_2 = \{d, e\}$,$C_3 = \{h\}$,$C_4 = \{i\}$,$C_5 = \{j\}$
$T = (\{f, g\}, \{b, c\})$

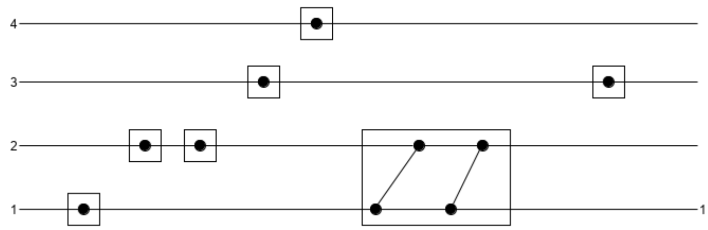
Θεώρημα 1.5.5. Έστω P $(3 + 1)$-ελεύθερο μερικώς διατεταγμένο σύνολο με d στοιχεία. Υπάρχει διάταξη των μερών του P που ικανοποιεί το εξής:
Έστω $x, y \in P$ που ανήκουν σε διαφορετικά μέρη του P. Τότε $x < y$ ανν $h(x) \leq h(y) - 2$ ή $h(x) = h(y) - 1$ και το μέρος του x εμφανίζεται αριστερά από το μέρος του y.

Έστω διάταξη των μερών του P που ικανοποιεί την ιδιότητα αυτή. Βρίσκουμε λέξη στο αλφάβητο L αντικαθιστώντας:

- Ένα κλώνο C ύψους i με πληθάριθμο n με n επαναλήψεις του συμβόλου u_i.

- Ένα tangle T ύψους i με το $b_{i,i+1}(G)$ όπου G διμερές γράφημα ισόμορφο με το T.

Τότε η L είναι μια αναπαράσταση του P.



Σχήμα 1.6: L

Η διάταξη $C_1C_2C_3C_5TC_4$ ικανοποιεί την ζητούμενη ιδιότητα άρα η λέξη
$L = u_1u_2u_2u_3u_4b_{1,2}(G)u_3$ είναι μια αναπαράσταση του P.
Διαφορετικές λίστες μερών L_1, L_2 μπορούν να δώσουν το ίδιο μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Τότε συμβολίζουμε $L_1 \sim_P L_2$. Παρακάτω περιγράφονται κάποιες σχέσεις με τις οποίες μπορούμε να βρούμε μια $L' \sim_P L$ ξεκινώντας από μια λίστα μερών L.

1. (σχέσεις μετατροπής)
   Αν δύο συνεχόμενα μέρη μιας λίστας μερών βρίσκονται τουλάχιστον δύο επίπεδα μακρυά, μπορούν να μετατεθούν χωρίς να επηρεάσουν την μερική διάταξη. Για παράδειγμα $u_2u_1u_3u_3u_1b_{1,2}(G) \sim_P u_2u_3u_1u_3u_1b_{1,2}(G)$

2. (σχέσεις κυκλοφορίας)
   Αν A είναι λέξη στο Σ, συμβολίζουμε με A^+ τη λέξη που προκύπτει από την A αν ανεβάσουμε κάθε σύμβολο ένα επίπεδο. Τότε για λέξεις A, B ισχύει $A^+B \sim_P BA$. Ειδικότερα αν μια λίστα L ξεκινάει με το u_i για κάποιο $i \geq 2$, το u_i μπορεί να μετατραπεί σε u_{i-1} και να μεταφερθεί στο τέλος της λέξης.
   Για παράδειγμα $u_2u_1u_3u_3u_1b_{1,2}(G) \sim_P u_1u_3u_3u_1b_{1,2}(G)u_1$

3. (σχέσεις συνδυασμού)
   Αν δύο ή περισσότερα διαδοχικά μέρη σε μια λίστα L βρίσκονται στα επίπεδα $i, i+1$ για κάποιο i μπορούν να αντικατασταθούν από το $b_{i,i+1}(H)$ για κατάλληλο δίχρωμο γράφημα H. Αν $B_{i,i+1}$ είναι η λέξη που αντικαθιστούμε, συμβολίζουμε με $\overline{B_{i,i+1}}$ το ισοδύναμο $b_{i,i+1}(H)$. Άντίστροφα, για κάποια δίχρωμα γραφήματα H το $b_{i,i+1}(H)$ μπορεί να διασπαστεί σε μια ακολουθία από συνεχόμενα μέρη στα επίπεδα $i, i+1$.

Παρατηρούμε ότι τα tangle είναι ακριβώς τα δίχρωμα γραφήματα που δεν μπορούν να διασπαστούν με σχέσεις συνδυασμού. Επομένως, ένα $(3+1)$-ελεύθερο μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι επιπλέον $(2+2)$-ελεύθερο ανν έχει αναπαράσταση στο αλφάβητο $\{u_i : i \in \mathbb{P}\}$.

1.6 Φυσικές Unit Interval Διατάξεις

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την ειδικότερη κατηγορία των (3+1) και (2+2)-ελεύθερων μερικών διατάξεων, που θα μας φανεί χρήσιμη στη μελέτη των χρωματικών συμμετρικών και quasi-συμμετρικών συναρτήσεων.
Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι $(3+1)$ και $(2+2)$-ελεύθερο ανν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

$$x, y, z, w \in P \text{ με } x < y < z \Rightarrow w > x \text{ ή } w < z \tag{1.2}$$

$$x, y, z, w \in P \text{ με } x < y \text{ και } z < w \Rightarrow x < w \text{ ή } z < y \tag{1.3}$$

Ένα τέτοιο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P ονομάζεται unit interval διάταξη γιατί υπάρχει μια συνάρτηση $f : P \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in P$ να ισχύει $x <_P y$ ανν το διάστημα $[f(x), f(x)+1]$ βρίσκεται αυστηρά πριν από το διάστημα $[f(y), f(y)+1]$[22].

Ορισμός 1.6.1.

1. Έστω P μερικώς διατεταγμένο σύνολο στο $[d]$. Το P λέγεται φυσική unit interval διάταξη αν ικανοποιεί τα παρακάτω:

   (α′) $n <_P m \Rightarrow n <_{\mathbb{N}} m$.

   (β′) $n <_P k$ και m μη P-συγκρίσιμο με τα $n, k \Rightarrow n <_{\mathbb{N}} m <_{\mathbb{N}} k$

2. Έστω ακολουθία $m = (m_1, m_2, \cdots, m_{d-1})$, ώστε $m_1 \leq m_2 \cdots \leq m_{d-1} \leq d$ και $m_i \geq i$ για κάθε i. Μια τέτοια ακολουθία ονομάζεται ακολουθία Hessenberg.
   Ορίζουμε στο $[d]$ μερική διάταξη $\leq_m$ ως εξής:
   Έστω $i \neq j \in [d]$. Τότε $i <_m j$ ανν $i < d$ και $j \in \{m_i + 1, m_i + 2, \cdots, d\}$
   Συμβολίζουμε $P(m) = ([d], \leq_m)$.

Θα αποδείξουμε τώρα κάποιους ισοδύναμους χαρακτηρισμούς για τα (3+1) και (2+2)-ελεύθερα μερικώς διατεταγμένα σύνολα που θα μας είναι χρήσιμοι παρακάτω.

Θεώρημα 1.6.2. Έστω P μερικώς διατεταγμένο σύνολο με d στοιχεία. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το P είναι unit interval διάταξη.

2. Υπάρχει μετάθεση w των στοιχείων του P τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in P$: $x <_P y$ ανν $h(x) \leq h(y) - 2$ ή $h(x) = h(y) - 1$ και το x εμφανίζεται αριστερά του y στην w.

3. Το P είναι ισόμορφο με κάποια φυσική unit interval διάταξη.

4. Υπάρχει ακολουθία Hessenberg m τέτοια ώστε $P \simeq P(m)$.

Απόδειξη
$(2) \Rightarrow (3)$
Έστω $f = w^{-1}$. Ορίζουμε 1-1 αντιστοιχία $g : P \to [d]$ ως εξής:
Έστω αρίθμηση $p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_{k_i}}$ των στοιχείων του L_i τέτοια ώστε $f(p_{i_1}) < f(p_{i_2}) < \cdots < f(p_{i_{k_i}})$ για $i = 1, 2, \cdots, h(P)$. Θέτουμε $g(p_{i_j}) = k_1 + \cdots + k_{i-1} + j$, για $i = 1, 2, \cdots, h(P)$, $j = i_1, \cdots, i_{k_i}$.

Ορίζουμε διάταξη $\leq_L$ στο $[d]$ ως εξής: $n <_L m$ ανν $g^{-1}(n) <_P g^{-1}(m)$. Θα δείξουμε ότι το $([d], \leq_L)$ είναι φυσική unit interval διάταξη. Για $n \in [d]$ θέτουμε $h^*(n) = h(g^{-1}(n))$ και $f^*(n) = f(g^{-1}(n))$. Η h^* είναι η συνάρτηση ύψους του L και για την f^* ισχύει $\forall n, m \in [d]$: $n <_L m \Leftrightarrow h^*(n) \leq h^*(m) - 2$ ή $h^*(n) = h^*(m) - 1$ και $f^*(n) < f^*(m)$.
Παρατηρούμε ότι αν $h^*(n) < h^*(m)$ τότε $n <_{\mathbb{N}} m$. Επίσης αν $h^*(n) = h^*(m)$ και $f^*(n) < f^*(m)$ τότε $n <_{\mathbb{N}} m$

1. Έστω $n <_L m$. Τότε $h^*(n) < h^*(m)$ άρα $n <_{\mathbb{N}} m$.

2. Έστω $n <_L k$ και m μη L-συγκρίσιμο με τα n, k. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

   - $h^*(n) \leq h^*(k) - 2$
     Αφού το m είναι μη συγκρίσιμο με τα n, k έπεται ότι $h^*(n) = h^*(k) - 2$ και $h^*(m) = h^*(n) + 1$. Άρα $h^*(n) < h^*(m) < h^*(k) \Rightarrow n <_{\mathbb{N}} m <_{\mathbb{N}} k$.

   - $h^*(n) = h^*(k) - 1$ και $f^*(n) < f^*(k)$
     Αφού το m είναι μη συγκρίσιμο με τα n, k έπεται ότι $h^*(m) = h^*(n)$ ή $h^*(n) + 1$.
     Αν $h^*(m) = h^*(n)$ έχουμε $h^*(m) < h^*(k)$ άρα $m <_{\mathbb{N}} k$. Επίσης $h^*(m) = h^*(k) - 1$ και $m \parallel_L k$ άρα $f^*(m) > f^*(k)$. Τότε $h^*(m) = h^*(n)$ και $f^*(m) > f^*(k) > f^*(n)$ άρα $n <_{\mathbb{N}} m$.
     Αν $h^*(m) = h^*(n) + 1$ έχουμε $h^*(m) > h^*(n)$ άρα $m >_{\mathbb{N}} n$. Επίσης $h^*(m) = h^*(n) + 1$ και $m \parallel_L n$ άρα $f^*(m) < f^*(n)$. Τότε $h^*(m) = h^*(k)$ και $f^*(m) < f^*(n) < f^*(k)$ άρα $m <_{\mathbb{N}} k$.

$\square$

Κάθε unit interval διάταξη είναι ισόμορφη με μοναδική φυσική unit interval διάταξη και το πλήθος όλων των φυσικών unit interval διατάξεων στο $[d]$ ισούται με τον αριθμό Catalan $C_d = \dfrac{1}{d+1}\dbinom{2d}{d}$.
Αν $m = (m_1, m_2, \cdots, m_{d-1})$ είναι ακολουθία Hessenberg θέτουμε $G(m) = \mathrm{inc}(P(m))$. Τότε για $i < j \in [d]$ ισχύει $\{i, j\} \in E(G(m))$ ανν $j \leq m_i$, δηλαδή το $G(m)$ είναι μια ένωση από κλίκες στα διαστήματα $[1, m_1], [2, m_2], \cdots, [d-1, m_{d-1}]$.
Ένα τέτοιο γράφημα ονομάζεται φυσικό unit interval γράφημα. Θεωρούμε μια ειδική περίπτωση φυσικών unit interval διατάξεων και γραφημάτων.
Έστω $k = 1, \cdots, d-1$ και $m = (m_1, m_2, \cdots, m_{d-1})$ με

$$m_i = \begin{cases} i + k, \text{αν } i + k \leq d \\ d, \text{αλλιώς} \end{cases}$$

.
Συμβολίζουμε $P_{d,k} = P(m)$ και $G_{d,k} = G(m)$. Τότε για κάθε $i < j \in [d]$:
$i <_{P_{d,k}} j$ ανν $j - i > k$ και $\{i, j\} \in E(G_{d,k})$ ανν $j - i \leq k$.

- Για $k = d - 1$ προκύπτει η κλίκα K_d

- Για $k = d - 2$ προκύπτει το γράφημα $K_d \setminus \{1, d\}$, δηλαδή η κλίκα K_d στην οποία έχει αφαιρεθεί η ακμή ανάμεσα στις κορυφές 1 και d.

- Για $k = d-3$ προκύπτει το γράφημα $K_d \setminus \{\{1,d\},\{1,d-1\},\}2,d\}\}$, δηλαδή η κλίκα K_d στην οποία έχουν αφαιρεθεί οι ακμές $\{1,d\},\{1,d-1\}$ και $\{2,d\}$.
- Για $k = 1$ προκύπτει το μονοπάτι P_d με σύνολο ακμών $\{\{1,2\},\{2,3\},\cdots,\{d-1,d\}\}$.
- Για $k = 2$ προκύπτει γράφημα G στο $[d]$ με $\{i,j\} \in E(G)$ ανν $\mid i-j \mid = 1$ ή 2. Το γράφημα αυτό ονομάζεται τριγωνική κλίμακα τάξης d και συμβολίζεται με TL_d.

Κεφάλαιο 2

Συμμετρικές Συναρτήσεις

2.1 Η Άλγεβρα των Συμμετρικών Συναρτήσεων

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε συνοπτικά την άλγεβρα των συμμετρικών και quasi-συμμετρικών συναρτήσεων. Για περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί κανείς να απευθυνθεί στο [29].

Ορισμός 2.1.1. Έστω $x_1, x_2, \cdots$ μεταβλητές που μετατίθενται και $x = (x_1, x_2, \cdots)$. Ομογενής συμμετρική συνάρτηση βαθμού d ονομάζεται μια τυπική δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_a c_a x^a \in \mathbb{Q}[[x]]$$

όπου

- το a διατρέχει όλες τις ασθενείς συνθέσεις $(a_1, a_2, \cdots)$ του d
- $c_a \in \mathbb{Q}$
- $x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots$
- $f(x_{w_1}, x_{w_2}, \cdots) = f(x_1, x_2, \cdots)$ για κάθε μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_{(z_{>0})}$

Συμβολίζουμε με $\Lambda_{\mathbb{Q}}^d$ το σύνολο των ομογενών συμμετρικών συναρτήσεων βαθμού d με συντελεστές στο $\mathbb{Q}$. Παρατηρούμε ότι αν $f, g \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^d$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ έπεται ότι $\lambda f + \mu g \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^d$. Άρα το $\Lambda_{\mathbb{Q}}^d$ είναι $\mathbb{Q}$-διανυσματικός χώρος. Επιπλέον, αν $f \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ και $g \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^m$, τότε $fg \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^{m+n}$. Άρα η $\Lambda_{\mathbb{Q}} := \Lambda_{\mathbb{Q}}^0 \oplus \Lambda_{\mathbb{Q}}^1 \oplus \Lambda_{\mathbb{Q}}^2 \oplus \cdots$ είναι διαβαθμισμένη, μεταθετική $\mathbb{Q}$-άλγεβρα, που την ονομάζουμε άλγεβρα των συμμετρικών συναρτήσεων.
Θα ορίσουμε τώρα και θα μελετήσουμε 5 σημαντικές βάσεις του $\Lambda_{\mathbb{Q}}^d$, τις μονωνυμικές, στοιχειώδεις, πλήρεις, powersum και Schur συμμετρικές συναρτήσεις.
Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) \vdash d$. Τότε, θέτουμε $\lambda_i = 0$ για $i > k$, άρα $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$.

Ορισμός 2.1.2. (Μονωνυμική Συμμετρική Συνάρτηση)

$$m_\lambda = \sum_a x^a \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^d$$

όπου το a διατρέχει όλες τις διακεκριμένες μεταθέσεις των μερών της λ.

Παράδειγμα 2.1.3.
$m_{(3)} = x_1^3 + x_2^3 + \cdots = \sum_{i\geq 1} x_1^3$
$m_{(2,1)} = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + \cdots = \sum_{i\neq j} x_i^2 x_j$
$m_{(1,1,1)} = x_1 x_2 x_3 + x_2 x_4 x_5 + \cdots = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k$

Αν $f = \sum_a c_a x^a$ είναι ομογενής συμμετρική συνάρτηση βαθμού d είναι σαφές ότι $f = \sum_\lambda c_\lambda m_\lambda$, άρα το σύνολο $\{m_\lambda : \lambda \vdash d\}$ είναι βάση του $\mathbb{Q}-$διανυσματικού χώρου $\Lambda_{\mathbb{Q}}^d$ και $\dim_{\mathbb{Q}} \Lambda_{\mathbb{Q}}^d = \mathrm{par}(d)$.
Ορισμός 2.1.4. (Στοιχειώδης Συμμετρική Συνάρτηση)
$e_n = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} = m_{(1^n)}$
$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_k}$

Παράδειγμα 2.1.5.
$e_{(3)} = m_{(1,1,1)} = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k$
$e_{(2,1)} = e_2 e_1 = (\sum_{i<j} x_i x_j)(\sum_k x_k) = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \cdots)(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots)$
$= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + \cdots + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 + \cdots = m_{(2,1)} + 3m_{(1,1,1)}$
$e_{(1,1,1)} = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots)^3 = m_{(3)} + 3m_{(2,1)} + 6m_{(1,1,1)}$

Πρόταση 2.1.6.

1. $E(t) = \sum_{d\geq 0} e_d t^d = \prod_{i\geq 1}(1 + x_i t)$

2. $e_\lambda = \sum_{\mu\vdash d} M_{\lambda\mu} m_\mu$, όπου $M_{\lambda\mu}$ το πλήθος των $(0,1)$-πινάκων $A = (a_{ij})$ με αθροίσματα γραμμών $(\lambda_1, \cdots, \lambda_\kappa)$ και αθροίσματα στηλών $(\mu_1, \mu_2, \cdots)$

3. $M_{\lambda\mu} > 0 \Rightarrow \mu \trianglelefteq \lambda'$ και $M_{\lambda\lambda'} = 1$

4. Για κάθε $\lambda \vdash d$ υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί $\beta_{\lambda\mu}$ με $\beta_{\lambda\mu} \neq 0 \Rightarrow \mu \trianglerighteq \lambda'$ και $\beta_{\lambda\lambda'} = 1$ τέτοιοι ώστε $m_\lambda = \sum_{\mu\vdash d} \beta_{\lambda\mu} e_\mu$, άρα το σύνολο $\{e_\lambda : \lambda \vdash d\}$ είναι βάση του $\Lambda_{\mathbb{Q}}^d$. Ισοδύναμα, το σύνολο $\{e_1, e_2, \cdots\}$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο και παράγει την $\mathbb{Q}$-άλγεβρα $\Lambda_{\mathbb{Q}}$.

Ορισμός 2.1.7. (πλήρης συμμετρική συνάρτηση)
$h_n = \sum_{i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda$
$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_k}$

Πρόταση 2.1.8.

1. $H(t) = \sum_{d\geq 0} h_d t^d = \prod_{i\geq 0} \frac{1}{1 - x_i t}$

2. $\sum_{k=0}^{d}(-1)^k h_{d-k}e_k = 0$

3. Το σύνολο $\{h_\lambda : \lambda \vdash d\}$ είναι βάση του $\Lambda^d_{\mathbb{Q}}$. Ισοδύναμα το σύνολο $\{h_1, h_2, \cdots\}$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο και παράγει την $\mathbb{Q}$-άλγεβρα $\Lambda_{\mathbb{Q}}$.

Αφού $\Lambda_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[e_1, e_2, \cdots] = \mathbb{Q}[h_1, h_2, \cdots]$ και τα σύνολα $\{e_1, e_2, \cdots\}$ και $\{h_1, h_2, \cdots\}$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα, υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $\mathbb{Q}$-αλγεβρών $\omega : \Lambda_{\mathbb{Q}} \to \Lambda_{\mathbb{Q}}$ που ικανοποιεί τη σχέση $\omega e_d = h_d$ για κάθε φυσικό αριθμό d. Από την σχέση $\sum_{k=0}^{d}(-1)^k h_{d-k}e_k = 0$ προκύπτει ότι για κάθε d ισχύει $\omega h_d = e_d$ για κάθε λ, άρα η ω είναι αυτοαντίστροφη.

Ορισμός 2.1.9. (powersum)
$p_n = \sum_{i\geq 1} x_i^n = m_{(n)}$
$p_\lambda = p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots p_{\lambda_k}$

Πρόταση 2.1.10.

1. $P(t) = \sum_{d\geq 1} p_d t^d = \sum_{i\geq 1} \frac{x_i t}{1 - x_i t}$

2. $\sum_{\lambda} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda(x) p_\lambda(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{(1 - x_i y_j)}$

3. $\sum_{\lambda} \frac{1}{z_\lambda} \varepsilon_\lambda p_\lambda(x) p_\lambda(y) = \prod_{i,j} (1 + x_i y_j)$

4. $h_d = \sum_{\lambda\vdash d} \frac{p_\lambda}{z_\lambda}$

5. Το σύνολο $\{p_\lambda : \lambda \vdash d\}$ είναι βάση του $\Lambda^d_{\mathbb{Q}}$.

2.2 Οι Συναρτήσεις Schur

Για να ορίσουμε τις συναρτήσεις Schur θα χρειαστούμε ένα σημαντικό συνδυαστικό αντικείμενο, τα γενικευμέν Young ταμπλώ.

Ορισμός 2.2.1. Γενικευμένο ταμπλώ σχήματος λ λέγεται κάθε απεικόνιση T από το σύνολο των τετραγώνων του διαγράμματος Young της λ στο $\mathbb{Z}_{>0}$. Αν μ_i είναι το πλήθος των τετραγώνων στα οποία αντιστοιχεί το i, τότε η ασθενής σύνθεση $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots)$ λέγεται τύπος ή περιεχόμενο του T.

Για παράδειγμα το $T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 5 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 5 \\ \cline{1-3} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$ έχει σχήμα $\lambda = (4, 3, 1)$ και τύπο $\mu = (2, 1, 0, 3, 2)$.

Συμβολίζουμε με $T_{\lambda\mu}$ το σύνολο των γενικευμένων ταμπλώ σχήματος λ και τύπου μ.

Ορισμός 2.2.2. Ένα $T \in T_{\lambda\mu}$ ονομάζεται γενικευμένο Young ταμπλώ αν:

1. τα στοιχεία κάθε γραμμής αυξάνουν ασθενώς προς τα δεξιά
2. τα στοιχεία κάθε στήλης αυξάνουν αυστηρά προς τα κάτω

Έστω YT_λ το σύνολο των γενικευμένων Young ταμπλώ σχήματος λ.

Παράδειγμα 2.2.3. Το $T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$ είναι γενικευμένο Young ταμπλώ σχήματος $(3,2,1)$ και τύπου $(2,1,0,1,2,0,0,\cdots)$.

Ορισμός 2.2.4. Έστω $\lambda, \mu \vdash d$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{K}_{\lambda\mu}$ το πλήθος των γενικευμένων Young ταμπλώ σχήματος λ και τύπου μ. Οι αριθμοί $K_{\lambda\mu}$ ονομάζονται αριθμοί Kostka.

Παράδειγμα 2.2.5. Τα γενικευμένα Young ταμπλώ σχήματος $\lambda = (3,1)$ και τύπου $\mu = (1,2,1)$ είναι τα $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$ άρα $K_{\lambda\mu} = 2$

Πρόταση 2.2.6. $\mathrm{K}_{\lambda\mu} > 0$ ανν $\lambda \trianglerighteq \mu$ και $K_{\lambda\lambda} = 1$, για $\lambda, \mu \vdash d$.
Απόδειξη
Θεωρούμε γενικευμένο Young ταμπλώ T σχήματος λ και τύπου μ. Για $i = 1, 2, \cdots$ τα στοιχεία $1, 2, \cdots, i$ καταλαμβάνουν $\mu_1 + \cdots + \mu_i$ τετράγωνα του T, τα οποία βρίσκονται στις i πρώτες γραμμές του. Άρα $\mu_1 + \cdots + \mu_i \le \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$.
Αν τώρα έχουμε $\lambda = \mu$ υπάρχει μοναδικό γενικευμένο Young ταμπλώ T σχήματος λ και τύπου μ, στο οποίο όλα τα τετράγωνα της i γραμμής περιέχουν τον αριθμό i, για $i = 1, 2, \cdots$.

□

Για γενικευμένο ταμπλώ T γράφουμε $x^T = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots$, όπου $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots)$ ο τύπος του T.
Αν T το ταμπλώ του παραδείγματος (2.2.3) έχουμε $x^T = x_1^2 x_2 x_4 x_5^2$.

Ορισμός 2.2.7. Για $\lambda \vdash d$, ορίζουμε τη συνάρτηση Schur

$$s_\lambda(x) = \sum_T x^T$$

όπου το T διατρέχει όλα τα γενικευμένα Young ταμπλώ σχήματος λ.

Παράδειγμα 2.2.8.

- $s_{(d)}(x) = \displaystyle\sum_{i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_d} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d} = h_d(x)$
- $s_{(1^d)}(x) = \displaystyle\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_d} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d} = e_d(x)$

Πρόταση 2.2.9. Για κάθε $\lambda \vdash d$ το $s_\lambda(x) \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^d$ και

$$s_\lambda(x) = \sum_{\mu \vdash d} K_{\lambda\mu} m_\mu(x)$$

άρα το σύνολο $\{s_\lambda : \lambda \vdash d\}$ είναι βάση του $\Lambda_{\mathbb{Q}}^d$

Παράδειγμα 2.2.10. Τα γενικευμένα Young ταμπλώ σχήματος $(2,1)$ και τύπου $(2,1)$ είναι τα $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$ και τα γενικευμένα Young ταμπλώ σχήματος $(2,1)$ και τύπου $(1,1,1)$ είναι τα $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$ άρα $s_{(2,1)}(x) = m_{(2,1)}(x) + 2m_{(1,1,1)}(x)$

Ορισμός 2.2.11. Έστω $\lambda \vdash d$. Young ταμπλώ σχήματος λ ονομάζεται κάθε ταμπλώ σχήματος λ και περιεχομένου $[d]$ στο οποίο:

1. Τα στοιχεία κάθε γραμμής αυξάνουν αυστηρά προς τα δεξιά
2. Τα στοιχεία κάθε στήλης αυξάνουν αυστηρά προς τα κάτω

Έστω SYT_λ το σύνολο των Young ταμπλώ σχήματος λ και f^λ το πλήθος τους.
Έστω γενικευμένο Young ταμπλώ T και $x \in Z_{>0}$. Το γενικευμένο Young ταμπλώ $T \leftarrow x$ κατασκευάζεται με εισαγωγή του x στις γραμμές του T ως εξής:
Αν το x είναι μεγαλύτερο ή ίσο από όλα τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του T, τότε προστίθεται ένα τετράγωνο στο τέλος αυτής της γραμμής που περιέχει το x. Διαφορετικά θεωρούμε το πρώτο από αριστερά τετράγωνο της πρώτης γραμμής του T που περιέχει στοιχείο $x' > x$. Το x αντικαθιστά το x' στο τετράγωνο αυτό και η διαδικασία συνεχίζεται για το x' και τη δεύτερη γραμμή του T.

Λήμμα 2.2.12. Έστω γενικευμένο Young ταμπλώ T και $x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$. Θεωρούμε διαδοχικές εισαγωγές $T' = T \longleftarrow x$ και $T' \longleftarrow y$ στις γραμμές του T. Έστω B, B' τα τετράγωνα στα οποία αυτές τερματίζουν αντίστοιχα.

1. Αν $x \leq y$ τότε το B' βρίσκεται ασθενώς πάνω από το B.
2. Αν $x > y$ τότε το B' βρίσκεται αυστηρά κάτω από το B.

Ορισμός 2.2.13. Λεξικογραφική $2 \times d$ διάταξη λέγεται κάθε $2 \times d$ πίνακας
$w = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_d \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_d \end{pmatrix}$
με στοιχεία θετικούς ακεραίους, τέτοιος ώστε

1. $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_d$
2. $i_r = i_{r+1} \Rightarrow j_r \leq j_{r+1}$

Το γενικευμένο Young ταμπλώ $P(w) = (\cdots((\emptyset \leftarrow j_1) \leftarrow j_2)\cdots) \leftarrow j_d$ λέγεται P-ταμπλώ ή ταμπλώ εισαγωγής της w. Το Q-ταμπλώ ή ταμπλώ καταγραφής της w ορίζεται ως το γενικευμένο Young ταμπλώ $Q(w)$ του ίδιου σχήματος με το $P(w)$, στο οποίο για $r = 1, 2, \cdots, d$ το i_r καταλαμβάνει το τετράγωνο στο οποίο καταλήγει η εισαγωγή του j_r στο r βήμα της κατασκευής του P-ταμπλώ.

Θεώρημα 2.2.14. (αντιστοιχία RSK)
Η απεικόνιση $w \longmapsto (P(w), Q(w))$ είναι 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των λεξικογραφικών $2 \times d$ διατάξεων στο σύνολο των ζευγών (P, Q) γενικευμένων Young ταμπλώ, του ίδιου σχήματος, το καθένα με d τετράγωνα. Με την αντιστοιχία αυτή:

1. Τα στοιχεία του $P(w)$ είναι τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής της w και τα στοιχεία του $Q(w)$ είναι τα στοιχεία της πρώτης γραμμής της w.

2. Η w έχει πρώτη γραμμή $(1\,2 \cdots d)$ ανν το $Q(w)$ είναι Young ταμπλώ.

3. Η w είναι μετάθεση $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & d \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_d \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_d$ του $[d]$ ανν τα $P(w)$ και $Q(w)$ είναι Young ταμπλώ.

Ορισμός 2.2.15. Έστω T Young ταμπλώ. Ένας ακέραιος $i \in [d-1]$ ονομάζεται κάθοδος του T, αν το $i+1$ εμφανίζεται χαμηλότερα από το i στο T. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Des}(T)$ το σύνολο των καθόδων του T και με $\mathrm{des}(T)$ το πλήθος τους.

Πόρισμα 2.2.16. Έστω $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & d \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_d \end{pmatrix}$
Τότε $\mathrm{Des}(Q(w)) = \{j \in [d-1] : i_j > i_{j+1}\}$.

Πρόταση 2.2.17.

1. $h_\lambda = \sum_{\mu \vdash d} K_{\mu\lambda} s_\mu$

2. $\sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \sum_{\lambda} h_\lambda(x) m_\lambda(y) = \sum_{\lambda} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda(x) p_\lambda(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j}$

Απόδειξη

1. $h_\lambda = \sum_{w} x^w$, όπου το w διατρέχει όλες τις $2 \times d$ λεξικογραφικές διατάξεις για τις οποίες το $Q(w)$ έχει τύπο λ και $x^w = x^{P(w)}$. Τότε, λόγω του RSK έχουμε $h_\lambda = \sum_{(P,Q)} x^P$, όπου το (P, Q) διατρέχει όλα τα ζεύγη γενικευμένων Young ταμπλώ ίδιου σχήματος με d τετράγωνα για τα οποία το Q έχει τύπο λ. Άρα
$$h_\lambda = \sum_{\mu \vdash d} K_{\mu\lambda} \sum_{P \in \mathrm{YT}_\mu} x^P = \sum_{\mu \vdash d} K_{\mu\lambda} s_\mu$$

2. $\sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \sum_{\lambda} \sum_{Q \in \mathrm{YT}_\lambda} x^Q \sum_{P \in \mathrm{YT}_\lambda} y^P = \sum_{(P,Q)} x^Q y^P$
όπου το (P, Q) διατρέχει όλα τα ζεύγη γενικευμένων Young ταμπλώ ίδιου σχήματος. Από τον αλγόριθμο RSK έπεται ότι $\sum_{(P,Q)} x^P y^Q = \sum_{w} x^{Q(w)} y^{P(w)}$.

   Έστω w λεξικογραφική διάταξη με διακεκριμένες στήλες $\begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} i_k \\ j_k \end{pmatrix}$, που

έχουν αντίστοιχες πολλαπλότητες $a_1, a_2, \cdots, a_k$.
Τότε $x^{Q(w)}y^{P(w)} = (x_{i_1}y_{j_1})^{a_1}(x_{i_2}y_{j_2})^{a_2}\cdots(x_{i_k}y_{j_k})^{a_k}$.
Το μονώνυμο $(x_{i_1}y_{j_1})^{a_1}(x_{i_2}y_{j_2})^{a_2}\cdots(x_{i_k}y_{j_k})^{a_k}$ προκύπτει από το γινόμενο $(1+x_{i_1}y_{j_1}+(x_{i_1}y_{j_1})^2+\cdots)(1+x_{i_2}y_{j_2}+(x_{i_2}y_{j_2})^2+\cdots)\cdots(1+x_{i_k}y_{j_k}+(x_{i_k}y_{j_k})^2+\cdots)$ και άρα λόγω της σχέσης $\prod_{i,j}\frac{1}{1-x_iy_j} = \prod_{i,j}(1+x_iy_j+x_i^2y_j^2+\cdots)$ έπεται ότι

$$\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y) = \prod_{i,j}\frac{1}{1-x_iy_j}$$

Τέλος $\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y) = \sum_\lambda s_\lambda(x)\sum_\mu K_{\lambda\mu}m_\mu(y) =$
$\sum_\mu m_\mu(y)\sum_\lambda K_{\lambda\mu}s_\lambda(x) = \sum_\mu h_\mu(x)m_\mu(y)$

□

Με τη χρήση μιας ελαφρώς διαφορετικής αντιστοιχίας, της RSK* μπορούμε να αποδείξουμε τα παρακάτω:

Πρόταση 2.2.18.

1. $e_\lambda = \sum_{\mu\vdash d} K_{\mu'\lambda}s_\mu$

2. $\sum_\lambda s_{\lambda'}(x)s_\lambda(y) = \sum_\lambda e_\lambda(x)m_\lambda(y) = \sum_\lambda \frac{\varepsilon_\lambda}{z_\lambda}p_\lambda(x)p_\lambda(y) = \prod_{i,j}(1+x_iy_j)$

Πόρισμα 2.2.19.

1. $\omega s_\lambda = s_{\lambda'}$

2. $\omega p_\lambda = \varepsilon_\lambda p_\lambda$

Απόδειξη

1. $\sum_{\mu\vdash d} K_{\mu\lambda}s_{\mu'} = e_\lambda = \omega h_\lambda = \sum_{\mu\vdash d} K_{\mu\lambda}\omega s_\mu$, άρα αφού ο πίνακας $(K_{\mu\lambda})_{\mu,\lambda}$ είναι αντιστρέψιμος έπεται ότι $\omega s_\lambda = s_{\lambda'}$ για κάθε λ.

2. $\sum_\lambda \frac{1}{z_\lambda}\omega p_\lambda(x)p_\lambda(y) = \sum_\lambda \omega s_\lambda(x)s_\lambda(y) = \sum_\lambda s_{\lambda'}(x)s_\lambda(y) = \sum_\lambda \frac{1}{z_\lambda}\varepsilon_\lambda p_\lambda(x)p_\lambda(y)$
και από την γραμμική ανεξαρτησία των $p_\lambda(y)$ έπεται ότι $\omega p_\lambda = \varepsilon_\lambda p_\lambda$

□

Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο στον $\Lambda^d_{\mathbb{Q}}$ με $\langle s_\lambda, s_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$.
Τότε για συμμετρικές συναρτήσεις $f(x), g(x) \in \Lambda^d_{\mathbb{Q}}$ ισχύει $f(x) = \sum_{\lambda\vdash d}\langle f(x), s_\lambda(x)\rangle s_\lambda(x)$ και $\langle f(x), g(x)\rangle = \sum_{\lambda\vdash d}\langle f(x), s_\lambda(x)\rangle\langle g(x), s_\lambda(x)\rangle$.

Πόρισμα 2.2.20.

1. $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda\mu}$

2. $\langle \mu_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$

Απόδειξη

1. Έστω $s_\lambda = \sum\limits_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} p_\mu$. Για $d \leq 1$ θεωρούμε πίνακες $A = \big(\langle p_\lambda, p_\mu \rangle\big)_{\lambda,\mu}$, $\mathrm{B} = (\alpha_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu}$. Θα δείξουμε ότι $A = (z_\mu \delta_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu}$. Ισχύει $\delta_{\lambda\nu} = \langle s_\lambda, s_\nu \rangle = \sum\limits_{\mu,\beta} \alpha_{\lambda\mu} \langle p_\mu, p_\beta \rangle \alpha_{\nu\beta}$, άρα $BAB^t = I_{\mathrm{par(d)}}$. Τότε

$$\sum_\nu \frac{1}{z_\nu} p_\nu(x) p_\nu(y) = \sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y) =$$

$$\sum_\lambda \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu} p_\mu(x) \sum_\nu \alpha_{\lambda\nu} p_\nu(y) = \sum_{\mu,\nu} \left(\sum_\lambda \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\nu} \right) p_\mu(x) p_\nu(y)$$

Από την γραμμική ανεξαρτησία των p_ν έπεται ότι $\dfrac{1}{z_\nu} p_\nu(x) = \sum\limits_\mu \sum\limits_\lambda \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\nu} p_\mu(x)$ άρα $\sum\limits_\lambda \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\nu} = 0$ αν $\mu \neq \nu$ και $\sum\limits_\lambda \alpha_{\lambda\nu} \alpha_{\lambda\nu} = \dfrac{1}{z_\nu}$, επομένως $B^t B = (\dfrac{1}{z_\lambda} \delta_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu}$. Άρα $B(z_\mu \delta_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu} B^t = I_{\mathrm{par(d)}} = BAB^t$. Οι πίνακες B, B^t είναι αντιστρέψιμοι, γιατί τα $\{s_\lambda\}$ και $\{p_\lambda\}$ είναι βάσεις, άρα $A = (z_\mu \delta_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu}$.

2. $\sum\limits_{\nu \vdash d} \mathrm{K}_{\lambda\nu} \langle m_\nu, h_\mu \rangle = \langle \sum\limits_{\nu \vdash d} K_{\lambda\nu} m_\nu(x), h_\mu \rangle = \langle s_\lambda, h_\mu \rangle = K_{\lambda\mu}$
και αφού ο πίνακας $(K_{\lambda\nu})_{\lambda,\nu}$ είναι αντιστρέψιμος έχουμε $\langle \mu_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$.

□

Έστω $b = \{b_\lambda : \lambda \vdash d\}$ μια βάση του $\Lambda^d_{\mathbb{Q}}$. Μια συμμετρική συνάρτηση $f \in \Lambda^d$ λέγεται b-θετική αν $f = \sum\limits_{\lambda \vdash d} c_\lambda b_\lambda$, με $c_\lambda \geq 0$, για κάθε λ.

Πρόταση 2.2.21.

1. Αν η f είναι h-θετική θα είναι επιπλέον p και Schur-θετική

2. Η f είναι e-θετική ανν η ωf είναι h-θετική

2.3 Η Ορίζουσα Jacobi-Trudi

Θα γράψουμε τώρα τις συναρτήσεις Schur σαν γραμμικό συνδυασμό των πλήρων συμμετρικών συναρτήσεων, θα υπολογίσουμε δηλαδή τον αντίστροφο του πίνακα Kostka ($K_{\lambda\mu}$). Η ταυτότητα Jacobi-Trudi εκφράζει το s_λ σαν ορίζουσα ενός πίνακα που τα στοιχεία του είναι της μορφής $h_i, i = 1, 2, \cdots$. Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε τον κλασικό ορισμό των συναρτήσεων Schur.
Για $b = (b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^d$ ορίζουμε την πολυωνυμική συνάρτηση $a_b = a_b(x_1, \cdots, x_d) = \det(x_i^{b_j})_{i,j=1}^d$ ή ισοδύναμα $a_b = \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon_w x_1^{b_{w_1}} \cdots x_d^{b_{w_d}}$.
Από τον ορισμό προκύπτουν τα εξής:

1. $a_b(x_{w_1}, \cdots, x_{w_d}) = \varepsilon_w a_b(x_1, \cdots, x_d)$, για $w \in \mathfrak{S}_d$
2. $a_b = 0$ αν το b έχει δύο συντεταγμένες ίσες μεταξύ τους.

Για $\delta = (d-1, d-2, \cdots, 1, 0)$, έχουμε $a_\delta = \det(x_i^{d-j}) = \prod_{1 \le i < j \le d} (x_i - x_j)$(ορίζουσα Vandermond). Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για κάθε διαμέριση λ με το πολύ d μέρη, η $\dfrac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$ είναι συμμετρική συνάρτηση των $x_1, \cdots, x_d$ και ότι $\dfrac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_d]$.
Τότε, αν η λ είναι διαμέριση με το πολύ d μέρη ισχύει

$$s_\lambda(x_1, \cdots, x_d) = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$$

Θεώρημα 2.3.1.

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \le i,j \le k}$$

όπου $h_0 = 1$ και $h_r = 0$ για $r < 0$.
Απόδειξη

- $\sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \sum_\lambda h_\lambda(x) m_\lambda(y)$
- $\sum_\mu h_\mu(x) m_\mu(y_1, \cdots, y_d) = \sum_{b \in \mathbb{N}^d} h_b(x) y_1^{b_1} \cdots y_d^{b_d}$
- πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σχέσης $\sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \sum_{b \in \mathbb{N}^d} h_b(x) y_1^{b_1} \cdots y_d^{b_d}$
  με το $a_\delta(y_1, \cdots, y_d)$
  $$\sum_\lambda s_\lambda(x) a_{\lambda+\delta}(y_1, \cdots, y_d) = \left(\sum_{b \in \mathbb{N}^d} h_b(x) y_1^{b_1} \cdots y_d^{b_d} \right) \left(\sum_{w \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon_w y_1^{\delta_{w_1}} \cdots y_d^{\delta_{w_d}} \right)$$
  άρα $\sum_\lambda \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon_w s_\lambda(x) y_1^{\lambda_1 + \delta_{w_1}} \cdots y_d^{\lambda_d + \delta_{w_d}} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon_w \sum_{b \in \mathbb{N}^d} h_b y_1^{b_1 + \delta_{w_1}} \cdots y_d^{b_d + \delta_{w_d}}$

Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ διαμέριση του d. Παίρνοντας τον συντελεστή του $y_1^{\lambda_1+\delta_1} \cdots y_d^{\lambda_d+\delta_d}$ και στα δύο μέλη βρίσκουμε ότι

$$s_\lambda(x) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon_w h_{\lambda_1+w_1-1} \cdots h_{\lambda_d+w_d-d}$$

$\square$

Παράδειγμα 2.3.2. $s_{(3,2)} = \det \begin{pmatrix} h_3 & h_4 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} = h_{(3,2)} - h_{(4,1)}$

2.4 O Τύπος του Roichman

Όπως είδαμε, οι συναρτήσεις $s_\lambda(x), \mu \vdash d$ είναι μια βάση της $\Lambda_{\mathbb{Q}}^d$, άρα υπάρχουν $\eta^\lambda(\mu) \in \mathbb{Q}$ τέτοιοι ώστε $p_\lambda(x) = \sum_{\mu \vdash d} \eta^\lambda(\mu) s_\lambda(x)$ για κάθε λ διαμέριση του d.

Θα αποδείξουμε τώρα έναν τύπο για τους συντελεστές $\eta^\lambda(\mu)$, που αποτελεί ειδική περίπτωση ενός αποτελέσματος του Roichman για Kazdhan-Lusztig χαρακτήρες [19].

Όπως θα δούμε αργότερα αυτοί οι συντελεστές δίνουν τους ανάγωγους χαρακτήρες της συμμετρικής ομάδας. Θα δώσουμε την απόδειξη του Rum [21], που χρησιμοποιεί μόνο στοιχεία από συμμετρικές συναρτήσεις και τον αλγόριθμο RSK. Οι ορισμοί που χρησιμοποιούνται παρακάτω προέρχονται από τους Roichman και Adin [1].

Έστω $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \vDash d$ και $S_a = \{r_1 < r_2 < \cdots < r_{k-1}\}$.

Θέτουμε $I_a = [d-1] \setminus S_a$. Για $i = 1, 2, \cdots, k$ συμβολίζουμε $I_a^i = \{r_{i-1}+1, \cdots, r_i - 1\}$, όπου $r_0 = 0, r_k = d$.

Ορισμός 2.4.1. Έστω $U \subseteq [d-1]$. Το U ονομάζεται a-μονότροπο αν για κάθε $i = 1, 2, \cdots, k$ η τομή $U \cap I_a^i$ είναι αρχικό τμήμα του I_a^i. Δηλαδή αν το $U \cap I_a$ είναι ξένη ένωση διαστημάτων της μορφής $[a_1 + \cdots + a_{i-1} + 1, a_1 + \cdots + a_{i-1} + l_i]$, όπου $0 \le l_i \le a_i - 1$, για $i = 1, \cdots, k$.

Παράδειγμα 2.4.2. Έστω $d = 11$ και $a = (2, 3, 2, 4)$. Τότε $S_a = \{2, 5, 7\}$ και $I_a = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$.

- Το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 8, 9\}$ είναι a-μονότροπο, γιατί $A \cap I_a = \{1, 3, 8, 9\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{8, 9\}$
- το $B = \{1, 4, 6\}$ δεν είναι γιατί το $B \cap I_a^2 = \{4\}$ δεν είναι αρχικό τμήμα του $I_a^2 = \{3, 4\}$.

Συμβολίζουμε με U_a το σύνολο των a-μονότροπων υποσυνόλων του $[d-1]$.

Αν $a = (d)$ τότε $U_a = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \cdots, [d-1]\}$, ενώ αν $a = (1, 1, \cdots, 1)$ τότε $U_a = 2^{[d-1]}$.

Ορισμός 2.4.3. Έστω $a \vDash d$. Ένα Young ταμπλώ T λέγεται a-μονότροπο αν το $\mathrm{Des}(T)$ είναι a-μονότροπο. Συμβολίζουμε με $U_a(\lambda)$ το σύνολο όλων των a-μονότροπων Young ταμπλώ σχήματος λ.

Θεώρημα 2.4.4.

$$p_\mu(x) = \sum_{\lambda \vdash d} \eta^\lambda(\mu) s_\lambda(x)$$

όπου $\mu \vdash d$ και $\eta^\lambda(\mu) = \sum_{T \in U_\mu(\lambda)} (-1)^{\#\mathrm{Des}(T) \setminus S_\mu}$

Θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.4.5. Έστω $(i_1, i_2, \cdots, i_d) \in \mathbb{Z}^d_{>0}$. Θέτουμε

$$\varphi_d(i_1, i_2, \cdots, i_d) = \begin{cases} (-1)^s, \text{αν υπάρχει } s = 0, 1, \cdots, d-1 \text{ με } i_1 > \cdots > i_s > i_{s+1} \leq \cdots \leq i_d \\ 0, \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και για $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, m_k) \vdash d$
θέτουμε $\varphi_\mu(i_1, i_2, \cdots, i_d) = \varphi_{\mu_1}(i_1, \cdots, i_{\mu_1})\varphi_{\mu_2}(i_{\mu_1+1}, \cdots, i_{\mu_1+\mu_2}) \cdots \varphi_{\mu_k}(i_{\mu_1+\cdots+\mu_{k-1}+1}, \cdots, i_d)$
Τότε

$$p_\mu = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_d} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d} \varphi_\mu(i_1, i_2, \cdots, i_d)$$

Απόδειξη θεωρήματος
Έστω $\mu, \lambda \vdash d$. Θεωρούμε συνάρτηση $f^\mu_\lambda : \mathrm{SYT}_\lambda \to \mathbb{Z}$
με

$$f^\mu_\lambda(Q) = \begin{cases} (-1)^{\#\mathrm{Des}(Q) \setminus S_\mu}, \text{αν } Q \in U_\mu(\lambda) \\ 0, \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον περιορισμό της αντιστοιχίας RSK στο σύνολο των διατάξεων $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & d \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_d \end{pmatrix}$. Τότε αν $P = P(w), Q = Q(w)$ έχουμε:

1. $x^P = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d}$
2. Το Q είναι Young ταμπλώ
3. $\varphi_\mu(i_1, \cdots, i_d) = f^\mu_\lambda(Q)$, για $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k) \vdash d$. Πράγματι:
   - Έστω $Q \in U_\lambda(\mu)$
     Τότε $\mathrm{Des}(Q) \setminus S_\mu = [1, l_1] \cup [\mu_1+1, \mu_1+l_2] \cup \cdots \cup [\mu_1+\cdots+\mu_{k-1}+1, \mu_1+\cdots+\mu_{d-1}+l_k]$ όπου $0 \leq l_i \leq \mu_i - 1$, για $i = 1, \cdots, k$, άρα $\#\mathrm{Des}(Q) \setminus S_\mu = l_1 + l_2 + \cdots + l_k$, και $f^\mu_\lambda(Q) = (-1)^{l_1+l_2+\cdots+l_k}$. Τότε, λόγω του πορίσματος (2.2.16) έχουμε $i_1 > \cdots > i_{l_1} > i_{l_1+1} \leq \cdots \leq i_{\mu_1}$ δηλαδή $\varphi_{\mu_1}(i_1, i_2, \cdots, i_{\mu_1}) = (-1)^{l_1}$ κ.ο.κ. επομένως $\varphi_\mu(i_1, \cdots, i_d) = (-1)^{l_1+\cdots+l_k} = f^\mu(Q)$.
   - Έστω $Q \notin U_\lambda(\mu)$
     Τότε υπάρχει $j = 1, 2, \cdots, k$ και $l \in [\mu_1 + \cdots + \mu_{j-1} + 1, \mu_1 + \cdots + \mu_j - 2]$ τέτοιο ώστε $l \notin \mathrm{Des}(Q)$ και $l+1 \in \mathrm{Des}(Q)$. Τότε $i_l \leq i_{l+1} > i_{l+2}$ άρα $\varphi_{\mu_j} = 0$ και $\varphi_\mu = 0 = f^\mu(Q)$.

Τέλος $\sum_{\lambda \vdash d} \eta^\lambda(\mu) s_\lambda(x) = \sum_{\lambda \vdash d} \sum_{Q \in \mathrm{SYT}_\lambda} f^\mu_\lambda(Q) \sum_{P \in \mathrm{YT}_\lambda} x^P =$
$= \sum_{(P,Q)} f^\mu_\lambda(Q) x^P = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_d} x_{i_1} \cdots x_{i_d} \varphi_\mu(i_1, \cdots, i_d) = p_\mu$, λόγω της αντιστοιχίας RSK.

□

Πόρισμα 2.4.6.

$$s_\lambda(x) = \sum_{\mu \vdash d} \frac{p_\mu(x)}{z_\mu} \sum_{T \in U_\mu(\lambda)} (-1)^{\#\mathrm{Des}(T) \setminus S_\mu}$$

2.5 Quasi-συμμετρικές Συναρτήσεις

Θα ορίσουμε τώρα μια $\mathbb{Q}$-άλγεβρα μεγαλύτερη από αυτή των συμμετρικών συναρτήσεων. Ο επόμενος ορισμός δόθηκε από τον Gessel.

Ορισμός 2.5.1. Quasi-συμμετρική συνάρτηση στις μεταβλητές $x_1, x_2, \cdots$ με ρητούς συντελεστές είναι μια τυπική δυναμοσειρά $f(x) \in \mathbb{Q}[[x_1, x_2, \cdots]]$ φραγμένου βαθμού, τέτοια ώστε για κάθε $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{N}_{>0}$ να ισχύει

$$[x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_k}^{a_k}]f = [x_{j_1}^{a_1} \cdots x_{j_k}^{a_k}]f$$

όταν $i_1 < \cdots < i_k$ και $j_1 < \cdots < j_k$.

Συμβολίζουμε με QSym^d το σύνολο των quasi-συμμετρικών συναρτήσεων βαθμού d. Αν $f, g \in \mathrm{QSym}^d$ και $a, b \in \mathbb{Q}$ έπεται ότι $af + bg \in \mathrm{QSym}^d$, άρα το QSym^d είναι $\mathbb{Q}$-διανυσματικός χώρος. Επιπλέον, αν $f \in \mathrm{QSym}^n$ και $g \in \mathrm{QSym}^m$ τότε $fg \in \mathrm{QSym}^{n+m}$. Άρα η $\mathrm{QSym} = \mathrm{QSym}^0 \oplus \mathrm{QSym}^1 \oplus \mathrm{QSym}^2 \oplus \cdots$ είναι διαβαθμισμένη μεταθετική $\mathbb{Q}$-άλγεβρα, που την ονομάζουμε άλγεβρα των quasi-συμμετρικών συναρτήσεων.
Παρατηρούμε ότι $\Lambda_{\mathbb{Q}} \leq \mathrm{QSym}$, αλλά οι δύο άλγεβρες δεν είναι ίσες.
Για παράδειγμα η $\sum_{i<j} x_i^2 x_j$ είναι quasi-συμμετρική αλλά όχι συμμετρική συνάρτηση.
Θα δούμε τώρα δύο σημαντικές βάσεις της άλγεβρας των quasi-συμμετρικών συναρτήσεων, τις μονωνυμικές και τις θεμελιώδεις.

Ορισμός 2.5.2. (Μονωνυμική quasi-συμμετρική Συνάρτηση)

$$M_a = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_k}^{a_k}$$

όπου $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \vDash d$. Για $S \subseteq [d-1]$ θέτουμε $M_{d,S} = M_{\mathrm{co}(S)}$.

Αν $f(x) = \sum_a c_a x^a$ όπου το a διατρέχει τις ασθενείς συνθέσεις του d εύκολα προκύπτει ότι $f(x) = \sum_{a \in \mathrm{Comp}(d)} c_a M_a$. Επομένως το σύνολο $\{M_a : a \in \mathrm{Comp}(d)\}$ είναι $\mathbb{Q}$-βάση του QSym^d, άρα $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{QSym}^d = 2^{d-1}$.

Παράδειγμα 2.5.3.
$M_{(3)} = x_1^3 + x_2^3 + \cdots = \sum_{i \geq 1} x_i^3$
$M_{(2,1)} = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + \cdots = \sum_{i<j} x_i^2 x_j$

Αν $\lambda = \langle 1^{r_1}, 2^{r_2}, \cdots d^{r_d} \rangle$ έχουμε $m_\lambda = \sum_a M_a$, όπου το a διατρέχει τις διακεκριμένες μεταθέσεις της συλλογής $\{1^{r_1}, 2^{r_2}, \cdots, d^{r_d}\}$.
Για παράδειγμα $m_{(3,3,1)} = M_{(3,3,1)} + M_{(3,1,3)} + M_{(1,3,3)}$

Ορισμός 2.5.4. (Θεμελιώδης quasi-συμμετρική συνάρτηση)

$$F_{d,S} = \sum_{\substack{i_1 \leq \cdots \leq i_d \\ j \in S \Rightarrow i_j < i_{j+1}}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d}$$

όπου $S \subseteq [d-1]$. Για $a \vDash d$ θέτουμε $F_a = F_{d,S_a}$

Παράδειγμα 2.5.5.

$F_{d,\emptyset} = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_d} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d} = h_d$

$F_{d,[d-1]} = \sum_{i_1 < \cdots < i_d} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d} = e_d$

$F_{(1,2)} = F_{3,\{1\}} = \sum_{i<j\leq k} x_i x_j x_k = M_{(1,2)} + M_{(1,1,1)}$

$F_{(1,1,1)} = F_{3,\{1,2\}} = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = M_{(1,1,1)}$

Παρατηρούμε ότι $F_{d,S} = \sum_{S \subseteq T \subseteq [d-1]} M_{d,T}$ άρα, από αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού έπεται ότι

$$M_{d,S} = \sum_{S \subseteq T \subseteq [d-1]} (-1)^{\#(T \setminus S)} F_{d,T}$$

Επομένως και το σύνολο $\{F_{d,S} : S \subseteq [d-1]\}$ είναι βάση του QSym^d.

Παράδειγμα 2.5.6.

$M_{(2,1)} = M_{3,\{2\}} = F_{3,\{2\}} - F_{3,\{1,2\}} = F_{(2,1)} - F_{(1,1,1)}$
$M_{(1,2)} = M_{3,\{1\}} = F_{3,\{1\}} - F_{3,\{1,2\}} = F_{(1,2)} - F_{(1,1,1)}$
$M_{(1,1,1)} = M_{3,\{1,2\}} = F_{3,\{1,2\}} = F_{(1,1,1)}$

Θα συνδέσουμε τώρα τις quasi-συμμετρικές συναρτήσεις με τις (P,ω)−διαμερίσεις.
Για μερικώς διατεταγμένο σύνολο P και επιγραφή του ω ορίζουμε

$$K_{(P,\omega)} = \sum_{\sigma \in A^r(P,\omega)} x^\sigma$$

όπου $x^\sigma = \prod_{s \in P} x_{\sigma(s)}$.

Θεώρημα 2.5.7. Έστω μερικώς διατεταγμένο σύνολο P και $\omega : P \to [d]$ μια επιγραφή του. Τότε η $K_{(P,\omega)}$ είναι ομογενής quasi-συμμετρική συνάρτηση βαθμού d και

$$K_{(P,\omega)} = \sum_{w \in L(P,\omega)} F_{d,\mathrm{Des}(w)}$$

Απόδειξη
Από τη σχέση $A^r(P,\omega) = \biguplus_{w \in L(P,\omega)} S^r(w)$ προκύπτει ότι $K_{(P,\omega)} = \sum_{w \in L(P,\omega)} \sum_{\sigma \in S^r_w} x^\sigma$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\sum_{\sigma\in S_w^r} x^\sigma = F_{d,\mathrm{Des}(w)}$. Πράγματι

$$\sum_{\sigma\in S_w^r} x^\sigma = \sum_{\substack{\sigma(w^{-1}(w_1))\leq\cdots\leq\sigma(w^{-1}(w_d))\\ j\in\mathrm{Des}(w)\Rightarrow\sigma(w^{-1}(w_j))<\sigma(w^{-1}(w_{j+1}))}} x_{\sigma(w^{-1}(w_1))}x_{\sigma(w^{-1}(w_2))}\cdots x_{\sigma(w^{-1}(w_d))} =$$

$$= \sum_{\substack{i_1\leq\cdots\leq i_d\\ j\in\mathrm{Des}(w)\Rightarrow i_j<i_{j+1}}} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_d} = F_{d,\mathrm{Des}(w)}$$

□

Παράδειγμα 2.5.8. Για (P,ω) όπως στο σχήμα (1.1) έχουμε:
$K_{(P,\omega)} = F_{4,\mathrm{Des}(1324)} + F_{4,\mathrm{Des}(1234)} + F_{4,\mathrm{Des}(2134)} + F_{4,\mathrm{Des}(1243)} + F_{4,\mathrm{Des}(2143)}$

Έστω μερικώς διατεταγμένο σύνολο $P = \{u_1,\cdots,u_d\}$.

- Έστω w επιγραφή του P τέτοια ώστε $s<t\Rightarrow w(s)>w(t)$.
  Τότε $\sigma\in A^r(P,\omega)$ ανν $s<t\Rightarrow\sigma(s)<\sigma(t)$, δηλαδή η σ διατηρεί αυστηρά τη διάταξη του P. Τότε θέτουμε

$$K_P = K_{(P,\omega)} = \sum_{\substack{\sigma(u_i)<\sigma(u_j)\\ \text{αν } u_i<u_j}} x_{\sigma(u_1)}\cdots x_{\sigma(u_d)}$$

- Έστω w επιγραφή του P τέτοια ώστε $s<t\Rightarrow w(s)<w(t)$.
  Τότε $\sigma\in A^r(P,\omega)$ ανν $s<t\Rightarrow\sigma(s)\leq\sigma(t)$, δηλαδή η σ διατηρεί τη διάταξη του P. Τότε θέτουμε

$$\overline{K}_P = K_{(P,\omega)} = \sum_{\substack{\sigma(u_i)\leq\sigma(u_j)\\ \text{αν } u_i<u_j}} x_{\sigma(u_1)}\cdots x_{\sigma(u_d)}$$

Παρατήρηση 2.5.9. Έστω $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\kappa)\vdash d$ και $P = C_{\lambda_1}+C_{\lambda_2}+\cdots C_{\lambda_\kappa}$

1. $e_\lambda = K_P$
2. $h_\lambda = \overline{K}_P$

Θα δείξουμε τώρα ότι υπάρχει αυτοαντίστροφη απεικόνιση $\omega' : \mathrm{QSYM}^d \to \mathrm{QSYM}^d$, που επεκτείνει την αυτοαντίστροφη απεικόνιση ω.

Πρόταση 2.5.10. Έστω γραμμική απεικόνιση $\omega' : \mathrm{QSYM}^d \to \mathrm{QSYM}^d$, με $\omega'(F_{d,S}) = F_{d,\overline{S}}$, όπου $\overline{S} = [d-1]\setminus S$. Τότε:

1. $\omega'(K_P) = \overline{K}_P$, για μερικώς διατεταγμένο σύνολο P
2. Η ω' περιορίζεται στην ω στο $\Lambda^d_{\mathbb{Q}}$

Απόδειξη

1. Έστω ω επιγραφή του P, τέτοια ώστε $s <_P t \Rightarrow \omega(s) > \omega(t)$. Τότε $K_P = K_{(P,\omega)} = \sum_{w \in L(P,\omega)} F_{d,\mathrm{Des}(w)}$. Ορίζουμε $\overline{\omega} : P \to [d]$ με $\overline{\omega}(t) = d + 1 - \omega(t)$ για $t \in P$. Η $\overline{\omega}$ είναι επιγραφή του P και ισχύει $s <_P t \Rightarrow \overline{\omega}(s) < \overline{\omega}(t)$, άρα $\overline{K}_P = K_{(P,\overline{\omega})} = \sum_{w \in L(P,\overline{\omega})} F_{d,\mathrm{Des}(w)}$. Έχουμε $\omega' K_P = \sum_{w \in L(P,\omega)} F_{d,\overline{\mathrm{Des}(w)}}$. Παρατηρούμε ότι $w \in L(P,\overline{\omega})$ ανν $\overline{w} \in L(P,\omega)$ και $\mathrm{Des}(\overline{w}) = \overline{\mathrm{Des}(w)}$ άρα $\omega' K_P = \overline{K}_P$

2. Αρκεί να δείξουμε ότι $\omega = \omega'$ στην βάση $\{e_\lambda : \lambda \vdash d\}$ της $\Lambda^d_{\mathbb{Q}}$. Γνωρίζουμε ότι $\omega e_\lambda = h_\lambda$. Είδαμε ότι $e_\lambda = K_P$ και $h_\lambda = \overline{K}_P$ για $P = C_{\lambda_1} + \cdots + C_{\lambda_k}$ άρα $\omega' e_\lambda = \overline{K}_P = h_\lambda$.

□

Από εδώ και πέρα θα συμβολίζουμε την ω' με ω.
Θα δούμε τώρα πώς γράφονται οι συναρτήσεις Schur σαν γραμμικοί συνδυασμοί των θεμελιωδών quasi-συμμετρικών συναρτήσεων

Θεώρημα 2.5.11.

$$s_\lambda(x) = \sum_{T \in \mathrm{SYT}_\lambda} F_{d,\mathrm{Des}(T)}(x)$$

Απόδειξη
Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$. Θεωρούμε μερικώς διατεταγμένο σύνολο $P_\lambda = \{(1,2), \cdots, (1,\lambda_1), (2,1), \cdots, (2,\lambda_2), \cdots, (k,1), \cdots, (k,\lambda_k)\}$ με $(i,j) \leq (k,l)$ ανν $i \leq k$ και $j \leq l$. Ορίζουμε επιγραφή ω_λ του P_λ με $\omega_\lambda(k,1) = 1, \cdots, \omega_\lambda(k,\lambda_k) = \lambda_k$, $\omega_\lambda(k-1,1) = \lambda_k + 1, \cdots, \omega_\lambda(k-1,\lambda_{k-1}) = \lambda_k + \lambda_{k-1}$ κ.ο.κ. Τότε:

- Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $g : A^r(P_\lambda, \omega_\lambda) \to \mathrm{YT}_\lambda$.
  Για $\sigma : P_\lambda \to \mathbb{N}$ θεωρούμε το γενικευμένο ταμπλώ T_σ σχήματος λ που περιέχει στο τετράγωνο (i,j) την τιμή $\sigma(i,j)$. Άρα

$$s_\lambda = \sum_{T \in \mathrm{YT}_\lambda} x^T = \sum_{\sigma \in A^r(P_\lambda,\omega_\lambda)} x^\sigma = K_{(P_\lambda,\omega_\lambda)}$$

- $s_\lambda = \sum_{w \in L(P_\lambda,\omega_\lambda)} F_{d,\mathrm{Des}(w)}$ από το θεώρημα (2.5.7)

- Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : \mathrm{SYT}_\lambda \to L(P_\lambda, \omega_\lambda)$ με $\mathrm{Des}(T) = \mathrm{Des}(f(T))$ για κάθε $T \in \mathrm{SYT}_\lambda$.
  Αν $T \in \mathrm{SYT}_\lambda$ ορίζουμε την $w(T) = (w_1, w_2, \cdots, w_d) \in \mathfrak{S}_d$ ως εξής: αν το $n = 1, 2, \cdots, d$ καταλαμβάνει το τετράγωνο (i,j) στο T θέτουμε $w_n = \omega_\lambda(i,j)$

□

Τέλος θα ορίσουμε γραμμικό ισομορφισμό $\rho : \mathrm{QSYM}^{\mathrm{d}} \to \mathrm{QSYM}^{\mathrm{d}}$ που περιορίζεται στην ταυτοτική απεικόνιση στις συμμετρικές συναρτήσεις.
Για σύνθεση $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \vDash d$ συμβολίζουμε με a^{rev} την σύνθεση $(a_k, \cdots, a_2, a_1)$.
Έστω γραμμική απεικόνιση $\rho : \mathrm{QSYM}^d_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{QSYM}^d_{\mathbb{Q}}$ με $\rho(M_a) = M_{a^{\mathrm{rev}}}$. Η ρ έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Είναι αυτοαντίστροφη
2. $\rho(F_{d,S}) = F_{d,d-S}$, για κάθε $S \subseteq [d-1]$
   Έστω $a = (a_1, \cdots, a_k)$ και $S = S_a$. Τότε $S_{a^{\text{rev}}} = d - S$, άρα $\rho(M_{d,S}) = M_{d,d-S}$ για κάθε $S \subseteq [d-1]$.
   Επομένως $\rho(F_{d,S}) = \sum_{S \subseteq T \subseteq [d-1]} \rho(M_{d,T}) = \sum_{S \subseteq T \subseteq [d-1]} M_{d,d-T} = \sum_{d-S \subseteq T \subseteq [d-1]} M_{d,T} =$
   $= F_{d,d-S}$
3. Η ρ περιορίζεται στην ταυτοτική απεικόνιση στο $\Lambda^d_{\mathbb{Q}}$
   Αρκεί να δείξουμε ότι $\rho(m_\lambda) = m_\lambda$ για κάθε $\lambda \vdash d$. Έστω $\lambda = \langle 1^{r_1}, 2^{r_2}, \cdots, d^{m_d} \rangle$. Τότε $\rho(m_\lambda) = \sum_{a \in \mathfrak{S}(r_1, r_2, \cdots, r_d)} \rho(M_a) = \sum_{a \in \mathfrak{S}(r_1, r_2, \cdots, r_d)} M_{a^{\text{rev}}} = \sum_{a \in \mathfrak{S}(r_1, r_2, \cdots, r_d)} M_a = m_\lambda$.

2.6 Αναπαραστάσεις της Συμμετρικής Ομάδας και Χαρακτηριστική Frobenius

Θα περιγράψουμε τώρα συνοπτικά τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της $\mathfrak{S}_d$ και θα δούμε τη σχέση τους με τις συμμετρικές συναρτήσεις. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [29]. Στην ενότητα αυτή θα θεωρήσουμε συμμετρικές συναρτήσεις με συντελεστές στο $\mathbb{C}$.
Γνωρίζουμε από τη θεωρία αναπαραστάσεων πεπερασμένων ομάδων υπέρ του σώματος $\mathbb{C}$, ότι υπάρχουν $\mathrm{par}(d)$ διακεκριμένες ανάγωγες αναπαραστάσεις της $\mathfrak{S}_d$, όσες δηλαδή και οι κλάσεις συζυγίας της, και ότι κάθε αναπαράσταση της $\mathfrak{S}_d$ είναι ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεών της. Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) \vdash d$.

Ορισμός 2.6.1. Η υποομάδα Young της $\mathfrak{S}_d$ που αντιστοιχεί στην λ ορίζεται ως το ευθύ εσωτερικό γινόμενο:

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}(\{1, 2, \cdots, \lambda_1) \times \mathfrak{S}(\{\lambda_1 + 1, \cdots, \lambda_1 + \lambda_2\}) \times \cdots \mathfrak{S}(\{\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}, \cdots, d\})$$

$$\simeq \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k}$$

Για γενικευμένο ταμπλώ T σχήματος $\lambda \vdash d$ και περιεχομένου $[d]$ συμβολίζουμε με $R(T)$ και $C(T)$ τις υποομάδες της $\mathfrak{S}_d$ που αποτελούνται από τις μεταθέσεις του d που διατηρούν κάθε γραμμή και αντίστοιχα κάθε στήλη του T. Η $\mathfrak{S}_d$ δρα πάνω στο σύνολο των ταμπλώ σχήματος λ και περιεχομένου $[d]$ με $w \cdot T = \{w(t_{i,j})\}$ για $w \in \mathfrak{S}_d$ και $T = \{t_{i,j}\}$.
Ταμπλοειδές σχήματος λ λέγεται κάθε κλάση ισοδυναμίας του συνόλου των ταμπλώ σχήματος λ όπου δύο τέτοια ταμπλώ T και S θεωρούνται ισοδύναμα αν $T = w \cdot S$ για κάποια $w \in R(S)$. Γράφουμε $\{T\}$ για το ταμπλοειδές που είναι η κλάση ισοδυναμίας του ταμπλώ T. Η $\mathfrak{S}_d$ δρα πάνω στο σύνολο των ταμπλοειδών σχήματος λ με $w \cdot \{T\} = \{w \cdot T\}$.
Συμβολίζουμε με M^λ την αναπαράσταση μεταθέσεων της $\mathfrak{S}_d$ που αντιστοιχεί στη δράση της στο σύνολο των ταμπλοειδών σχήματος λ και με φ_λ τον αντίστοιχο χαρακτήρα. Τότε

$$\dim_{\mathbb{C}}(M^\lambda) = \frac{d!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_k!}$$

.
Αποδεικνύεται ότι το M^λ είναι κυκλικό $\mathfrak{S}_d$-πρότυπο που παράγεται από οποιοδήποτε πολυταμπλοειδές και είναι ισόμορφο με την αναπαράσταση μεταθέσεων $\mathbb{C} \cdot \mathfrak{S}_d/\mathfrak{S}_\lambda$ της $\mathfrak{S}_d$ στο σύνολο των αριστερών κλάσεων της υποομάδας Young $\mathfrak{S}_\lambda$ της $\mathfrak{S}_d$ που αντιστοιχεί στην λ.

Παρατήρηση 2.6.2. Ένα πεπερασμένο $\mathfrak{S}_d$-πρότυπο είναι ευθύ άθροισμα προτύπων της μορφής $M^\lambda, \lambda \vdash d$ αν και μόνο αν είναι αναπαράσταση μεταθέσεων της οποίας κάθε σταθεροποιούσα υποομάδα είναι υποομάδα Young.

Ορισμός 2.6.3. Πολυταμπλοειδές σχήματος $\lambda \vdash d$ λέγεται κάθε στοιχείο του M^λ της μορφής

$$e_T = \sum_{w \in C(T)} \varepsilon_w w \cdot \{T\}$$

όπου T είναι ταμπλώ σχήματος λ και περιεχομένου $[d]$.

Ορισμός 2.6.4. Το πρότυπο Specht που αντιστοιχεί στην $\lambda \vdash d$ ορίζεται ως ο υπόχωρος S^λ του M^λ που παράγεται γραμμικά από τα πολυταμπλοειδή $e_T \in M^\lambda$.

Αποδεικνύεται ότι το S^λ είναι $\mathfrak{S}_d$–υποπρότυπο του M^λ και ότι τα S^λ, για $\lambda \vdash d$ αποτελούν όλα τα ανάγωγα $\mathfrak{S}_d$–πρότυπα, οπού το καθένα εμφανίζεται ακριβώς μία φορά. Συμβολίζουμε με χ^λ τον χαρακτήρα της αναπαράστασης S^λ.
Το επόμενο θεώρημα δίνει τις πολλαπλότητες των ανάγωγων αναπαραστάσεων της $\mathfrak{S}_d$ στην αναπαράσταση M^μ. Οι πολλαπλότητες αυτές είναι ακριβώς οι αριθμοί Kotska.

Θεώρημα 2.6.5. (κανόνας Young)

$$M^\mu \simeq_{\mathfrak{S}_d} \oplus_{\lambda \vdash d} K_{\lambda\mu} S^\lambda$$

άρα $\varphi^\mu = \sum_{\lambda \vdash d} K_{\lambda\mu} \chi^\lambda$

Θεώρημα 2.6.6. Το σύνολο $\{e_T : T \text{ είναι Young ταμπλώ σχήματος } \lambda\}$ είναι βάση του S^λ, άρα $\dim_{\mathbb{C}} S^\lambda = f^\lambda$.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε πεπερασμένη ομάδα το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των ανάγωγων αναπαραστάσεών της ισούται με την τάξη της ομάδας, επομένως για την συμμετρική ομάδα έχουμε

$$\sum_{\lambda \vdash d} (f^\lambda)^2 = d!$$

Η σχέση αυτή αποδεικνύεται και συνδυαστικά με τον αλγόριθμο RSK.
Αποδεικνυέται ότι ο συντελεστής $\eta^\lambda(\mu)$ του s_λ στο ανάπτυγμα του p_μ ισούται με τον χαρακτήρα της ανάγωγης αναπαράστασης S^λ υπολογισμένο σε μια μετάθεση κυκλικού τύπου μ, έστω $\chi^\lambda(\mu)$.

Θεώρημα 2.6.7.

$$s_\lambda(x) = \sum_{\mu \vdash d} \frac{\chi^\lambda(\mu)}{z_\mu} p_\mu(x)$$

$$p_\mu(x) = \sum_{\lambda \vdash d} \chi^\lambda(\mu) s_\lambda(x)$$

Έστω Cl_d ο $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων $f : \mathfrak{S}_d \to \mathbb{C}$ που είναι σταθερές σε κάθε κλάση συζυγίας της $\mathfrak{S}_d$. Θεωρούμε εσωτερικό γινόμενο στον Cl_d με:

$$< a, b >= \sum_{\lambda \vdash d} \frac{1}{z_\lambda} \overline{a(\lambda)} b(\lambda)$$

Αν χ, ψ χαρακτήρες ισχύει $\langle \chi, \psi \rangle = \sum_{\lambda \vdash d} \frac{1}{z_\lambda} \chi(\lambda)\psi(\lambda)$. Οι ανάγωγοι χαρακτήρες $\chi^\lambda, \lambda \vdash d$ της $\mathfrak{S}_d$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του Cl_d. Άρα αν χ χαρακτήρας της $\mathfrak{S}_d$ η πολλαπλότητα του ανάγωγου χαρακτήρα χ^λ στον χ ισούται με $\langle \chi, \chi^\lambda \rangle$ για κάθε $\lambda \vdash d$.
Ορίζουμε συνάρτηση $ch^d : Cl_d \to \Lambda^d_{\mathbb{C}}$ με

$$ch^d(\chi) = \sum_{\mu \vdash d} \frac{1}{z_\mu} \chi(\mu) p_\mu$$

Η $ch^d(\chi)$ ονομάζεται χαρακτηριστική Frobenius του χ. Αποδεικνύεται ότι η ch^d είναι γραμμικός ισομορφισμός που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα 2.6.8.

1. Έστω 1_λ η χαρακτηριστική απεικόνιση της C_λ. Τότε $ch^d(1_\lambda) = \frac{p_\lambda}{z_\lambda}$
2. $ch^d(\chi^\lambda) = \sum_{\mu \vdash d} \frac{1}{z_\mu} \chi^\lambda(\mu) p_\mu = s_\lambda$
3. $ch^d(\varphi^\lambda) = ch^d(\sum_{\lambda \vdash d} K_{\lambda\mu}\chi^\lambda) = \sum_{\lambda \vdash d} K_{\lambda\mu} ch^d(\chi^\lambda) = \sum_{\lambda \vdash d} K_{\lambda\mu} s_\lambda = h_\mu$

Παρατήρηση 2.6.9. Έστω $f \in \Lambda^d_{\mathbb{C}}$

Η f ισούται με τη χαρακτηριστική Frobenius κάποιας αναπαράστασης της $\mathfrak{S}_d$ ανν είναι γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων Schur με θετικούς ακέραιους συντελεστές.

Η f ισούται με τη χαρακτηριστική Frobenius κάποιας αναπαράστασης μεταθέσεων της $\mathfrak{S}_d$ για την οποία κάθε σταθεροποιούσα υποομάδα είναι υποομάδα Young ανν είναι γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων h_λ με θετικούς ακέραιους συντελεστές.

Ορίζουμε $Cl = \oplus_{d \geq 0} Cl_d$ και $ch = \oplus_{d \geq 0} ch^d : Cl \to \Lambda_{\mathbb{C}}$. Η ch είναι ισομορφισμός $\mathbb{C}$-αλγεβρών.

Κεφάλαιο 3

Χρωματικές Συμμετρικές Συναρτήσεις

3.1 Ορισμοί και Βασικές ιδιότητες

Το 1995 ο Stanley[25] γενίκευσε το χρωματικό πολυώνυμο ενός γραφήματος, εισάγωντας την έννοια της χρωματικής συμμετρικής συνάρτησης. Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε ορισμούς, παραδείγματα και βασικές ιδιότητες για τη χρωματική συμμετρική συνάρτηση και θα μελετήσουμε το ανάπτυγμα στις βάσεις των μονωνυμικών και powersum συμμετρικών συναρτήσεων. Οι συντελεστές σε αυτά τα αναπτύγματα σχετίζονται με τις ευσταθείς και τις συνεκτικές διαμερίσεις του γραφήματος.

Ορισμός 3.1.1. Έστω γράφημα $G = (V, E)$ με $V(G) = V = \{v_1, v_2, \cdots, v_d\}$. Για χρωματισμό κ του G συμβολίζουμε με x^κ το μονώνυμο $x_{\kappa(v_1)} x_{\kappa(v_2)} \cdots x_{\kappa(v_d)}$. Τότε η χρωματική συμμετρική συνάρτηση του G είναι ίση με

$$X_G(x) = X_G = \sum_{\kappa \in K(G)} x^\kappa$$

Παράδειγμα 3.1.2.

- Αν $G = K_{(d)}$, $X_G = \sum_{\substack{i_1, i_2, \cdots, i_d \\ \text{διαφορετικά ανά δύο}}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d} = d! m_{(1^d)} = d! e_{(d)}$

- Αν G γράφημα με d απομονωμένες κορυφές, $X_G(x) = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_d} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d} = e_{(1^d)}$

- Αν $G = P_d$, $X_G = \sum_{i_1 \neq i_2 \cdots \neq i_d} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d}$, δηλαδή είναι ίση με την απαριθμήτρια των λέξεων Smirnov μήκους d.

Πρόταση 3.1.3.

1. Η X_G είναι ομογενής συμμετρική συνάρτηση βαθμού d, με συντελεστές στο $\mathbb{Q}$.

2. Η εκτίμηση $X_G(1^n)$ είναι ίση με το χρωματικό πολυώνυμο $\chi_G(n)$.

3. Για ξένη ένωση $G+H$ δύο γραφημάτων G και H ισχύει $X_{G+H} = X_G X_H$.

Αντίστοιχα με το χρωματικό πολυώνυμο, έχουμε την ισότητα

$$X_G(x) = \sum_{(o,\kappa)} x^\kappa$$

όπου το (o,κ) διατρέχει τα ζευγάρια με o άκυκλο προσανατολισμό και κ o-σύμφωνο χρωματισμό. Για άκυκλο προσανατολισμό o του G ορίζουμε μερική διάταξη $\leq_{\tilde{o}}$ στο $V(G)$ ως εξής: $u \leq_o v$ ανν υπάρχει προσανατολισμένος περίπατος με αρχή το v και πέρας το u. Συμβολίζουμε $(V(G), \leq_{\tilde{o}}) = \tilde{o}$. Τότε τα βυθίσματα του o είναι ακριβώς τα ελαχιστικά στοιχεία του $\tilde{o}$ και γενικότερα τα βυθίσματα i τάξης του o είναι τα στοιχεία του $\tilde{o}$ ύψους i. Επιπλέον, οι o-σύμφωνοι χρωματισμοί του G είναι ακριβώς οι συναρτήσεις που διατηρούν αυστηρά την διάταξη του $\tilde{o}$, άρα $K_{\tilde{o}} = \sum_{\kappa} x^\kappa$, όπου το κ διατρέχει τους o-σύμφωνους χρωματισμούς, οπότε

$$X_G(x) = \sum_{o \in AO(G)} K_{\tilde{o}}$$

Παρακάτω βλέπουμε μια συνδυαστική ερμηνεία για την συμμετρική συνάρτηση $\omega X_G(x)$.

Πρόταση 3.1.4.

$$\omega X_G(x) = \sum_{(o,\kappa)} x^\kappa$$

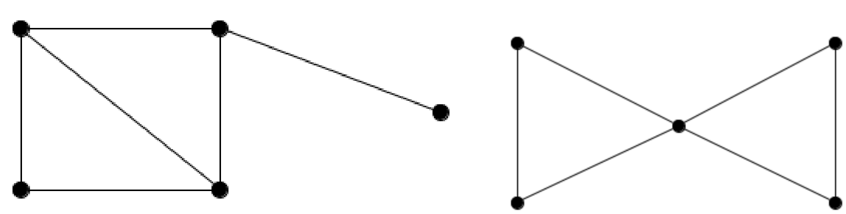
όπου το (o,κ) διατρέχει τα ζευγάρια με o άκυκλο προσανατολισμό και κ o-συμβατό χρωματισμό

Απόδειξη

Αν o άκυκλος προσανατολισμός τότε $\overline{K}_{\tilde{o}} = \sum_{\kappa} x^\kappa$ όπου το κ διατρέχει τους o-συμβατούς χρωματισμούς και $\omega X_G(x) = \sum_{o \in AO(G)} \omega K_{\tilde{o}} = \sum_{o \in AO(G)} \overline{K}_{\tilde{o}}$.

□

Όπως είδαμε το χρωματικό πολυώνυμο δεν διαχωρίζει τα μη ισόμορφα γραφήματα. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει πως το ίδιο ισχύει και για την χρωματική συμμετρική συνάρτηση.



Σχήμα 3.1: γραφήματα με την ίδια χρωματική συμμετρική συνάρτηση

Και τα δύο γραφήματα έχουν χρωματική συμμετρική συνάρτηση

$$4m_{(2,1,1)} + 24m_{(2,1,1,1)} + 120m_{(1^5)}$$

Στην περίπτωση όμως των δέντρων, όπως θα δούμε, τα πράγματα είναι διαφορετικά. Ενώ όλα τα δέντρα με d κορυφές έχουν το ίδιο χρωματικό πολυώνυμο $\chi_G(n) = n(n-1)^{d-1}$, το ερώτημα αν διαφορετικά δέντρα έχουν διαφορετική χρωματική συμμετρική συνάρτηση είναι ακόμα ανοιχτό. Για κάποιες οικογένειες γραφημάτων έχει αποδειχτεί ότι αυτό ισχύει. Για περισσότερες πληροφορίες πάνω σε αυτά τα θέματα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [18],[17].
Αναπτύσσουμε τώρα την X_G στις σημαντικές βάσεις της άλγεβρας $\Lambda^d_{\mathbb{Q}}$. Αν b βάση της $\Lambda^d_{\mathbb{Q}}$, το G θα λέγεται b-θετικό όταν η X_G είναι b-θετική. Επίσης ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο P λέγετα b-θετικό, αν το γράφημα $\mathrm{inc}(P)$ είναι b-θετικό.

Πρόταση 3.1.5.

$$X_G = \sum_{\lambda \vdash d} \alpha_\lambda \widetilde{m}_\lambda$$

όπου $\tilde{m}_\lambda = (r_1!r_2!\cdots)m_\lambda$, αν $\lambda = \langle 1^{r_1}, 2^{r_2}, \cdots\rangle$ (Επαυξημένη Μονωνυμική Συμμετρική Συνάρτηση) και α_λ είναι το πλήθος των ευσταθών διαμερίσεων του G τύπου λ. Μια διαμέριση λ του d λέγεται επιτρεπτή αν $a_\lambda > 0$, δηλαδή υπάρχει ευσταθής διαμέριση του G τύπου λ.
Απόδειξη
$\displaystyle\sum_{\lambda \vdash d} \beta_\lambda m_\lambda$, όπου το $\beta_\lambda = \left[x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots\right] X_G$ είναι το πλήθος των γνήσιων χρωματισμών του G τύπου λ. Ένας τέτοιος χρωματισμός μπορεί να επιλεγεί σε δύο στάδια. Πρώτα επιλέγουμε μια ευσταθή διαμέριση του G τύπου λ με α_λ τρόπους, και στη συνέχεια χρωματίζουμε κάποιο μέρος μεγέθους λ_i με το χρώμα i, για $i = 1, 2, \cdots$. Αυτό μπορεί να γίνει με $r_1!r_2!\cdots$ τρόπους. Άρα $\beta_\lambda = \alpha_\lambda r_1!r_2!\cdots$.

□

Πρόταση 3.1.6.

$$X_G = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{\# S} p_{\lambda(S)}$$

όπου $\lambda(S)$ η διαμέριση του d με μέρη ίσα με τους πληθαρίθμους των συνεκτικών συνιστωσών του G_S.
Απόδειξη
Έστω $S \subseteq E$ με $\lambda(S) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$. Ορίζουμε A_S το σύνολο των χρωματισμών που δίνουν σταθερό χρώμα σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του G_S και B_S το σύνολο των χρωματισμών στο A_S που δίνουν διαφορετικό χρώμα σε κορυφές του G αν αυτές συνδέονται με ακμή του $E \setminus S$.
Παρατηρούμε ότι

$$A_S = \biguplus_{S \subseteq A \subseteq E} B_A \tag{3.1}$$

Ορίζουμε συναρτήσεις $f(x), g(x) : 2^E \to \Lambda^d_{\mathbb{Q}}$, με
$g_S(x) = \displaystyle\sum_{\kappa \in A_S} x^\kappa$, για $S \subseteq E$
$f_S(x) = \displaystyle\sum_{\kappa \in B_S} x^\kappa$, για $S \subseteq E$
Τότε από την σχέση (3.1) ισχύει $g_S(x) = \displaystyle\sum_{S \subseteq A \subseteq E} f_A(x)$, για κάθε $S \subseteq E$, άρα από αρχή

εγκλεισμού-αποκλεισμού, προκύπτει ότι $f_s(x) = \sum_{S \subseteq A \subseteq E} (-1)^{\#(A \setminus S)} g_A(x)$.
Παρατηρούμε ότι το $B_\emptyset$ είναι το σύνολο των γνήσιων χρωματισμών του G, άρα

$$X_G(x) = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{\#S} g_S(x) \tag{3.2}$$

Επιπλέον,

$$p_{\lambda(S)}(x) = p_{\lambda_1}(x) p_{\lambda_2}(x) \cdots p_{\lambda_k}(x) = \sum_{i_1, \cdots, i_k \geq 1} x_{i_1}^{\lambda_1} \cdots x_{i_k}^{\lambda_k} = g_S(x) \tag{3.3}$$

Από τις (3.2) και (3.3) προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

□

Πρόταση 3.1.7.

$$X_G = \sum_{\pi \in L_G} \mu_{L_G}(\hat{0}, \pi) p_{\mathrm{type}(\pi)}$$

Απόδειξη
Έστω $\pi \in L_G$ με $\mathrm{type}(\pi) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$. Ορίζουμε A_π το σύνολο των χρωματισμών που δίνουν σταθερό χρώμα σε κάθε μέρος της π και B_π το σύνολο των χρωματισμών στο A_π που δίνουν διαφορετικό χρώμα σε κορυφές του G αν αυτές ανήκουν σε διαφορετικά μέρη της π και συνδέονται με ακμή.
Παρατηρούμε ότι

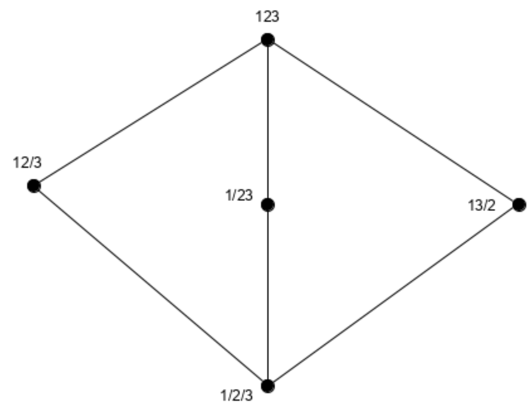
$$A_\pi = \biguplus_{\rho \geq \pi} B_\rho \tag{3.4}$$

Ορίζουμε συναρτήσεις $f(x), g(x) : L_G \to \Lambda_{\mathbb{Q}}^d$, με
$g_\pi(x) = \sum_{\kappa \in A_\pi} x^\kappa$, για $S \subseteq E$
$f_\pi(x) = \sum_{\kappa \in B_\pi} x^\kappa$, για $S \subseteq E$
Από τη σχέση (3.4) προκύπτει ότι $g_\pi(x) = \sum_{\rho \geq \pi} f_\rho(x)$ για κάθε $\pi \in L_G$, άρα από αντιστροφή Mobius $f_\pi(x) = \sum_{\rho \geq \pi} \mu_{L_G}(\pi, \rho) g_\rho(x)$, για κάθε $\pi \in L_G$. Για $\pi = \hat{0}$ προκύπτει

$$X_G = \sum_{\pi \in L_G} \mu_{L_G}(\hat{0}, \pi) g_\pi(x).$$

Όμοια με την (3.3) έχουμε $p_{\mathrm{type}(\pi)}(x) = g_\pi(x)$, άρα προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

□



Σχήμα 3.2: L_{C_3}

Για παράδειγμα, για τον κύκλο μήκους 3 έχουμε

$$X_{C_3}(x) = p_{(1,1,1)}(x) - 3p_{(2,1)}(x) + 2p_{(3)}(x)$$

Παρατήρηση 3.1.8. Στην περίπτωση που το G είναι δάσος, προκύπτει ότι

$$X_G = \sum_{\lambda \vdash d} \epsilon_\lambda b_\lambda p_\lambda$$

όπου b_λ το πλήθος των συνεκτικών διαμερίσεων του G τύπου λ.
Πράγματι, έστω $\varphi : L_G \to 2^E \simeq B_q$ με $\varphi(\pi) = \{\{x,y\} \in E : x \sim_\pi y\}$ για $\pi \in L_G$ και $\psi : B_q \to L_G$ με $x \sim_{\psi(S)} y$ ανν υπάρχει μονοπάτι απ' το x στο y με ακμές του S. Τότε όπως σε κάθε γράφημα $\psi \circ \varphi = 1_{L_G}$και θα δείξουμε ότι $\varphi \circ \psi = 1_{B_q}$. Έστω $S \in B_q$ με $\psi(S) = \pi$ και $\{x,y\} \in E$. Τότε $\{x,y\} \in \varphi(\pi)$ ανν $x \sim_\pi y$ ανν υπάρχει μονοπάτι από το x στο y με ακμές στο S ανν $\{x,y\} \in S$, γιατί το G είναι άκυκλο. Άρα ο σύνδεσμος L_G είναι ισόμορφος με την άλγεβρα Boole B_q και έχουμε $\mu_{L_G}(\hat{0},\pi) = \mu_{B_q}(\emptyset, \varphi(\pi)) = (-1)^{\#\varphi(\pi)} = (-1)^{d-|\pi|}$. Τελικά $X_G = \displaystyle\sum_{\pi \in L_G} (-1)^{d-|\pi|} p_{\mathrm{type}(\pi)} = \sum_{\lambda \vdash d} \epsilon_\lambda b_\lambda p_\lambda$

Επομένως αν G, H δέντρα ισχύει $\alpha_\lambda^G = \alpha_\lambda^H$ για κάθε $\lambda \vdash d$ ανν $b_\lambda^G = b_\lambda^H$ για κάθε $\lambda \vdash d$. Αυτό δεν ισχύει γενικά για τυχαία γραφήματα. Για παράδειγμα τα γραφήματα του σχήματος (3.1) έχουν ίσες χρωματικές συμμετρικές συναρτήσεις, άρα και τους ίδιου αριθμούς a_λ, αλλά το πρώτο έχει 3 συνεκτικές διαμερίσεις τύπου $(3,2)$, ενώ το δεύτερο έχει 2.

Πόρισμα 3.1.9. Για κάθε γράφημα G η $\omega X_G(x)$ είναι p-θετική.
Απόδειξη
$\omega X_G = \displaystyle\sum_{\pi \in L_G} \mu_{L_G}(\hat{0},\pi)\epsilon_{\mathrm{type}(\pi)} p_{\mathrm{type}(\pi)} = \sum_{\pi \in L_G} \mu_{L_G}(\hat{0},\pi)(-1)^{d-|\pi|} p_{\mathrm{type}(\pi)} =$
$= \displaystyle\sum_{\pi \in L_G} |\mu_{L_G}(\hat{0},\pi)| p_{\mathrm{type}(\pi)}$

□

3.2 Η Εικασία Stanley-Stembridge

Θα μελετήσουμε τώρα το ανάπτυγμα της χρωματικής συμμετρικής συνάρτησης στη βάση των στοιχειωδών συμμετρικών συναρτήσεων. Έστω $X_G = \sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda e_\lambda$, όπου c_λ είναι ακέραιοι αριθμοί.

Καταρχάς εξετάζουμε ποιες είναι οι πιθανές διαμερίσεις για τις οποίες ο συντελεστής c_λ είναι μη μηδενικός. Από τη σχέση $m_\lambda = \sum_{\mu \vdash d} \beta_{\lambda\mu} e_\mu$ προκύπτει ότι

$$X_G(x) = \sum_{\lambda \vdash d} \left(\sum_{\mu \trianglerighteq \lambda'} \alpha_\mu (r_1! r_2! \cdots) \beta_{\mu\lambda} \right) e_\lambda$$

άρα αν $c_\lambda \neq 0$ υπάρχει επιτρεπτή διαμέριση μ του d τέτοια ώστε $\lambda \trianglerighteq \mu'$.
Ειδικότερα αν P μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $G = \mathrm{inc}(P)$ τότε οι διαμερίσεις λ για τις οποίες $c_\lambda \neq 0$ έχουν το πολύ $h(P)$ μέρη.
Στη συνέχεια εξετάζουμε αν η $X_G(x)$ είναι e-θετική ή ισοδύναμα η $\omega X_G(x)$ είναι h-θετική. Το γεγονός ότι η $\omega X_G(x)$ είναι p-θετική είναι μια θετική ένδειξη προς αυτή την κατεύθυνση. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η e-θετικότητα είναι κάτι που γενικά δεν ισχύει:

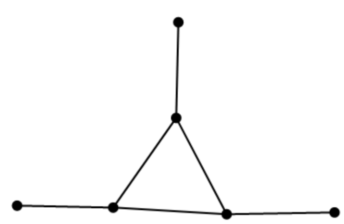
Παράδειγμα 3.2.1. Θεωρούμε το διμερές γράφημα $G = K_{3,1}$. Τότε

$$X_G(x,t) = 4e_{(4)} + 5e_{(3,1)} - 2e_{(2,2)} + e_{(2,1,1)}$$

Υπάρχει όμως μια οικογένεια γραφημάτων, για την οποία έχουμε ισχυρές ενδείξεις ότι η e-θετικότητα ισχύει. Αυτό διατυπώνεται στην διάσημη, και ακόμα ανοιχτή, εικασία των Stanley-Stembridge.

Εικασία 3.2.2. Αν το P είναι $(3+1)$-ελεύθερο, το $\mathrm{inc}(P)$ είναι e-θετικό.

Παρατηρούμε ότι τα γραφήματα αυτής της μορφής, είναι ακριβώς τα γραφήματα $\mathrm{inc}(P)$ που δεν περιέχουν ως επαγόμενο υπογράφημα το $K_{3,1}$. Αναρωτιέται λοιπόν κανείς αν η εικασία μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση όλων των γραφημάτων που δεν περιέχουν ως υπογράφημα το $K_{3,1}$. Όπως φαίνεται παρακάτω αυτό δεν μπορεί να γίνει.



Σχήμα 3.3: $K_{3,1}$-ελεύθερο γράφημα που δεν έχει e-θετική χρωματική συμμετρική συνάρτηση

Για το γράφημα G του σχήματος έχουμε

$$X_G = 12e_{(6)} + 18e_{(5,1)} + 12e_{(4,2)} - 6e_{(3,3)} + 6e_{(4,1,1)} + 6e_{(3,2,1)}$$

Το γράφημα αυτό δεν περιέχει ως υπογράφημα το $K_{3,1}$, αλλά δεν είναι της μορφής $\mathrm{inc}(P)$ για κάποιο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P.
Ο Stanley διατύπωσε ένα θεώρημα που δείχνει τη μη αρνητικότητα κάποιων αθροισμάτων των συντελεστών c_λ της $X_G(x)$ και μάλιστα δίνει μια συνδυαστική ερμηνεία γι αυτά τα αθροίσματα.

Θεώρημα 3.2.3. Έστω $X_G(x) = \sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda e_\lambda(x)$. Τότε

$$\sum_{l(\lambda)=j} c_\lambda = \mathrm{sink}(G, j)$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.2.4. Έστω P μερικώς διατεταγμένο σύνολο με d στοιχεία και $\phi : \mathrm{QSYM}^d \longrightarrow \mathbb{Q}[t]$ γραμμική συνάρτηση με

$$\phi(F_{d,S}) = \begin{cases} t(t-1)^i, & \text{αν } S = \{i+1, 1+2, \cdots, d-1\} \\ 0, \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για $S \subseteq [d-1]$. Τότε $\phi(K_P) = t^m$, όπου m το πλήθος των ελαχιστικών στοιχείων του P.
Απόδειξη
Έστω $t_1, t_2, \cdots, t_m$ τα ελαχιστικά στοιχεία του P. Επιλέγουμε επιγραφή ω του P τέτοια ώστε $s <_P t \Rightarrow \omega(s) >_{\mathbb{N}} \omega(t)$ και $\omega(t_m) = d$. Τότε $K_P = \sum_{w \in L(P,\omega)} F_{d,\mathrm{Des}(w)}$, άρα

$$\phi(K_P) = \sum_{w \in L(P,\omega)} \phi(F_{d,\mathrm{Des}(w)})$$

Θα δείξουμε ότι $\phi(F_{d,\mathrm{des}(w)}) = t(t-1)^i$ για ακριβώς $\binom{m-1}{i}$ μεταθέσεις $w \in L(P,\omega)$ για $i = 0, 1, \cdots, m-1$, επομένως $\phi(K_P) = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} t(t-1)^i = t^m$.
Έστω $w = (a_1, a_2, \cdots, a_d) \in L(P,\omega)$ με $\phi(F_{d,\mathrm{Des}(w)}) = t(t-1)^i$ για κάποιο i. Τότε

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_i < a_{i+1} > a_{i+2} > \cdots > a_{d-1} > a_d$$

Επομένως $a_{i+1} = d$ και τα $\omega^{-1}(a_1), \cdots, \omega^{-1}(a_i)$ είναι ελαχιστικά στοιχεία του P άρα $\{\omega^{-1}(a_1), \cdots, \omega^{-1}(a_i)\} \subseteq \{t_1, \cdots, t_{m-1}\}$.
Αντίστροφα, έστω $\{\omega^{-1}(a_1), \cdots, \omega^{-1}(a_i)\} \subseteq \{t_1, \cdots, t_{m-1}\}$ για κάποιο i με $a_1 < \cdots < a_i$. Αν $a_{i+2} > \cdots > a_d$ τα υπόλοιπα στοιχεία του $[d-1]$ η μετάθεση $w = (a_1, \cdots, a_i, d, a_{i+2}, \cdots, a_d)$ είναι γραμμική επέκταση του (P,ω) με $\mathrm{Des}(w) = \{i+1, i+2, \cdots, d-1\}$.

$\square$

Απόδειξη Θεωρήματος
Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι $X_G = \sum_{o \in AO(G)} K_{\tilde{o}}$. Εφαρμόζοντας το λήμμα για το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\tilde{o}$ παίρνουμε ότι $\phi(K_{\tilde{o}}) = t^{\mathrm{sink}(o)}$. Άρα

$$\phi(X_G) = \sum_{o \in AO(G)} t^{\mathrm{sink}(o)} = \sum_j \mathrm{sink}(G,j) t^j \tag{3.5}$$

Επιπλέον $\phi(X_G) = \sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda \phi(e_\lambda)$. Έστω $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \vdash d$. Γνωρίζουμε ότι $e_\lambda = K_P$, όπου $P = C_{\lambda_1} + \cdots + C_{\lambda_k}$. Παρατηρούμε ότι το P έχει k ελαχιστικά στοιχεία, άρα $\phi(e_\lambda) = t^k$. Επομένως

$$\phi(X_G) = \sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda t^{l(\lambda)} \tag{3.6}$$

Από τις σχέσεις (3.5) και (3.6) έπεται το ζητούμενο.

□

Πόρισμα 3.2.5.

1. $\#AO(G) = (-1)^d \chi_G(-1)$
2. $\mathrm{sink}(G,1) = (-1)^{d-1} d[n]\chi_G(n)$
   (ασθενέστερο της σχέσης $\mathrm{sink}(G,v) = (-1)^{d-1}[n]\chi_G(n)$ για v τυχαία κορυφή του G)

Απόδειξη

1. $e_m(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m}$ άρα
   $e_m(1^n) = \#\{(i_1, \cdots, i_m) : 1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n\} = \binom{n}{m}$ και $e_\lambda(1^n) = \binom{n}{\lambda_1}\binom{n}{\lambda_2}\cdots$
   επομένως

$$\chi_G(n) = \sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda \binom{n}{\lambda_1}\binom{n}{\lambda_2}\cdots \tag{3.7}$$

   Θέτοντας $n = -1$ στην (3.7) παίρνουμε
   $\chi_G(-1) = \sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda \binom{-1}{\lambda_1}\binom{-1}{\lambda_2}\cdots = \sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda (-1)^{\lambda_1}(-1)^{\lambda_2}\cdots = (-1)^d \sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda$ άρα
   $\sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda = (-1)^d \chi_G(-1)$.
   Τέλος $\#\mathrm{AO}(G) = \sum_j \mathrm{sink}(G,j) = \sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda = (-1)^d \chi_G(-1)$

2. $\chi_G(n) = \sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda \binom{n}{\lambda_1}\binom{n}{\lambda_2}\cdots = c_{(d)}\binom{n}{d} + \sum_{\lambda \vdash d, l(\lambda)>1} c_\lambda \binom{n}{\lambda_1}\binom{n}{\lambda_2}\cdots$
   Για $\lambda \vdash d$ με $l(\lambda) > 1$, έχουμε $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge 1$, άρα το πολυώνυμο $\binom{n}{\lambda_1}\binom{n}{\lambda_2}\cdots$ είναι πολλαπλασιο του n^2. Επομένως

$$[n]\chi_G(n) = [n]c_{(d)}\binom{n}{d} = c_{(d)}[n]\frac{n(n-1)\cdots(n-d+1)}{d!}(-1)^{d-1}\frac{c_{(d)}}{d}$$

άρα $c_{(d)} = (-1)^{d-1}d[n]\chi_G(n)$. Από το θεώρημα έπεται ότι $\operatorname{sink}(G,1) = c_{(d)}$ άρα προκύπτει το ζητούμενο.

□

Βλέπουμε λοιπόν πώς τα $\operatorname{sink}(G,1)$ και $\sum_j \operatorname{sink}(G,j)$ υπολογίζονται απευθείας από το χρωματικό πολυώνυμο. Αυτό δεν ισχύει για όλα τα $\operatorname{sink}(G,j)$ γενικά. Για παράδειγμα τα γραφήματα P_4 και $K_{3,1}$ έχουν το ίδιο χρωματικό πολυώνυμο, γιατί είναι δέντρα με 4 κορυφές, αλλά $\operatorname{sink}(P_4,3) = 0$ ενώ $\operatorname{sink}(K_{3,1},3) = 1$.
Ο Stanley απέδειξε με παρόμοιο τρόπο την e-θετικότητα κάποιων μικρότερων αθροισμάτων των συντελεστών c_λ.

Ορισμός 3.2.6. Έστω $\mu \vdash r \leq d,\ \mu = (\mu_1, \cdots, \mu_l)$. Η μ λέγεται επιτρεπτή αν υπάρχει ευσταθής διαμέριση τύπου μ για κάποιο $W \subseteq V$ με $\#W = r$.
Η μ λέγεται μεγιστική επιτρεπτή διαμέριση αν

- μ επιτρεπτή διαμέριση του d
- Αν $\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots)$ επιτρεπτή διαμέριση του $s \leq d$ τότε $(\nu_1, \cdots, \nu_l) \trianglelefteq (\mu_1, \cdots, \mu_l)$

Θεώρημα 3.2.7. Έστω $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_l) \vdash r \leq d$ μεγιστική επιτρεπτή διαμέριση του G. Τότε

$$\sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda = \operatorname{sink}(G, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_l, j, \cdots)$$

όπου η λ διατρέχει τις διαμερίσεις του d που είναι τέτοιες ώστε $\lambda' = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_l, j, \cdots)$ για $0 \leq j \leq d - r$ και $\operatorname{sink}(G, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_l, j, \cdots)$ είναι το σύνολο των άκυκλων προσανατολισμών του G με ακολουθία βυθισμάτων $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_l, j, \cdots)$.

Παρατήρηση 3.2.8. Αν $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k) = \langle 1^{r_1}, 2^{r_2}, \cdots \rangle$ μεγιστική επιτρεπτή διαμέριση του d τότε ισχύει $c_{\mu'} = \operatorname{sink}(G, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k) = r_1! r_2! \cdots \alpha_\mu > 0$.

Με βάση την προηγούμενη πρόταση αποδεικνύεται η e-θετικότητα στην ειδική περίπτωση των 3-ελεύθερων γραφημάτων και δίνεται και μια συνδυαστική ερμηνεία των αντίστοιχων συντελεστών.

Πόρισμα 3.2.9. Έστω ότι το G είναι ένωση δύο ξένων κλικών K_r, K_s με $r \geq s$. Τότε είναι e-θετικό και μάλιστα

$$X_G = \operatorname{sink}(G,1)e_{(r+s)} + \sum_{i=0}^{s-1} \operatorname{sink}(G, 2^{s-i}, 1)e_{(r+i,s-i)}, \text{ αν } r > s$$

$$X_G = \operatorname{sink}(G,1)e_{(2r)} + \sum_{i=1}^{r-1} \operatorname{sink}(G, 2^{r-i}, 1)e_{(r+i,r-i)} + \operatorname{sink}(G, 2^r, 0)e_{(r,r)}, \text{ αν } r = s$$

Απόδειξη
Οι επιτρεπτές διαμερίσεις του G είναι της μορφής $\langle 1^a, 2^b \rangle$ με $b \leq s$. Έστω $c_\lambda \neq 0$ για $\lambda \vdash d$. Τότε υπάρχει $\nu \vdash d$ επιτρεπτή με $\lambda' \trianglelefteq \nu$. Τότε $\nu = \langle 1^a, 2^b \rangle$, με $a + 2b = r + s$ και $b \leqslant s$, άρα $a + b \geqslant r$. $l(\lambda) \leq \nu_1 = 2$ και $l(\nu) = a + b \leq \lambda_1$, άρα $\lambda = (r+s)$ ή $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ με $\lambda_1 \geq r$, δηλαδή $\lambda = (r+i, s-i)$ για $i = 0, 1, \cdots, s-1$.

Είδαμε ότι $C_{(r+s)} = \mathrm{sink}(G,1)$. Έστω τώρα $\mu = \langle 2^{s-i}\rangle$ επιτρεπτή διαμέριση, με $i = 1,\cdots,s-1$. Θα είναι τότε μεγιστική επιτρεπτή, άρα $\mathrm{sink}(G,2^{s-i},1) = \sum_{\lambda'_1=2,\cdots,\lambda'_{s-i}=2,\lambda'_{s-i+1}=1} c_\lambda = c_{r+i,s-i}$.

Έστω τώρα ότι $r = s$ και η $\mu = \langle 2^r\rangle$ είναι επιτρεπτή. Τότε όμοια με πριν προκύπτει ότι $\mathrm{sink}(G,2^r,0) = \mathrm{sink}(G,2^r) = c_{(r,r)}$.

□

Επιπλέον, έχει αποδειχτεί η e-θετικότητα των γραφημάτων P_d, μέσω του υπολογισμού της γεννήτριας συνάρτησης $\sum_{d\geq 0} X_{P_d}t^d$. Η γεννήτρια αυτή υπολογίστηκε πρώτα από τους L. Carlitz,R. Scoville και T.Vaughan[5].

Θεώρημα 3.2.10.

$$\sum_{d\geq 0} X_{P_d}t^d = \frac{\sum_{i\geq 0} e_i t^i}{1-\sum_{i\geq 1}(i-1)e_i t^i}$$

άρα το P_d είναι e-θετικό για κάθε $d \geq 1$

Απόδειξη

Το P_d είναι δέντρο, άρα από την παρατήρηση (3.1.8) ισχύει $X_{P_d} = \sum_{\lambda\vdash d} \epsilon_\lambda b_\lambda p_\lambda$, όπου $b_\lambda = \#\{\pi \in L_{P_d} \mid \mathrm{type}(\pi) = \lambda\}$. Παρατηρούμε ότι κάθε συνεκτική διαμέριση $\pi \in L_G$ είναι της μορφής $\pi = \{\{1,2,\cdots,\alpha_1\},\{\alpha_1+1,\cdots,\alpha_1+\alpha_2\},\cdots,\{\alpha_1+\cdots+\alpha_{m-1}+1,\cdots,d\}\}$, όπου $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ είναι σύνθεση του d. Άρα, αν η λ είναι διαμέριση του d, το b_λ ισούται με το πλήθος των συνθέσεων του d που προκύπτουν αναδιατάσσοντας τα μέρη της λ. Αν $\lambda = \langle 1^{r_1}, 2^{r_2},\cdots\rangle$ τότε $b_\lambda = \binom{l(\lambda)}{r_1,r_2,\cdots}$, δηλαδή το πλήθος των μεταθέσεων της συλλογής $\{1^{r_1},2^{r_2},\cdots\}$. Άρα

$$X_{P_d} = \sum_{\lambda\vdash d}(-1)^{d-l(\lambda)}\binom{l(\lambda)}{r_1,r_2,\ldots}p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots = \sum_{\alpha\vDash d}(-1)^{d-l(\alpha)}p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}\cdots$$

Υπολογίζουμε τώρα την γεννήτρια συνάρτηση

$$\sum_{d\geq 0}X_{P_d}t^d = \sum_{d\geq 0}\sum_{\alpha\vDash d}(-1)^{d-l(\alpha)}p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}\cdots t^d = \sum_{\alpha\in\mathrm{Comp}}(-1)^{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots)-l(\alpha)}p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}\cdots t^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_i)\in\mathbb{Z}^i_{>0}}((-1)^{\alpha_1-1}p_{\alpha_1}t^{\alpha_1})\cdots((-1)^{\alpha_i-1}p_{\alpha_i}t^{\alpha_i})$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}p_n t^n\right)^i = \frac{1}{1-\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1}p_n t^n} = \frac{1}{1+P(-t)}$$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{1+P(-t)} = \frac{E(t)}{E(t)-tE'(t)}$$

Γνωρίζουμε ότι $E(t) = \prod_{i\geq 1}(1+x_it)$ και $P(t) = \sum_{i\geq 1}\frac{x_it}{1-x_it}$, επομένως

$$E(t)(1+P(-t)) = (1-\sum_{i\geq 1}\frac{x_it}{1+x_it})\prod_{j\geq 1}(1+x_jt) =$$

$$\prod_{j\geq 1}(1+x_jt) - t\sum_{i\geq 1}x_i\prod_{j\neq i}(1+x_jt) = E(t) - tE'(t)$$

□

$$\sum_{d\geq 0}X_{P_d}t^d = \left[\sum_{i\geq 0}e_it^i\right]\left[\sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j\geq 0}je_{j+1}t_{j+1}\right)^i\right] =$$

$1+e_1t+2e_2t^2+(3e_3+e_{(2,1)})t^3+(4e_4+2e_{(2,2)}+2e_{(3,1)})t^4+(5e_{(5)}+3e_{(4,1)}+7e_{(3,2)}+e_{(2,2,1)})t^5\cdots$

Πόρισμα 3.2.11.

$$X_{P_d}(x) = \sum_{m=1}^{\lfloor\frac{d+1}{2}\rfloor}\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_m\geq 2, k_1+\cdots+k_m=d+1}(k_1-1)(k_2-1)\cdots(k_m-1)e_{(k_1-1,k_2,\cdots,k_m)}$$

Έστω $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m) = \langle 1^{r_1}, 2^{r_2},\cdots\rangle$. Τότε:

$$c_\lambda = \begin{cases} d, \text{ αν } \lambda = (d) \\ \sum\limits_{a\in\mathfrak{S}(r_1,r_2,\cdots)} a_1(a_2-1)\cdots(a_m-1), \text{ αν } m = 2,\cdots,\lfloor\frac{d+1}{2}\rfloor \\ 0, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $\mathfrak{S}(r_1,r_2,\cdots)$ είναι το σύνολο των μεταθέσεων της συλλογής $\{1^{r_1},2^{r_2},\cdots\}$.
Θα περιγράψουμε τώρα μια συνδυστική ερμηνεία των συντελεστών c_λ για το μονοπάτι P_d. Έστω o άκυκλος προσανατολισμός του P_d. Δύο βυθίσματα x, y του G λέγονται διαδοχικά αν δεν υπάρχει άλλο βύθισμα στο κυκλικό διάστημα $[x,y]$. Έστω $o \in \mathrm{Sink}(G,k)$ και $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ είναι τα βυθίσματα του o. Τότε τα ζεύγη διαδοχικών βυθισμάτων είναι τα $\{x_k,x_1\},\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3\},\cdots,\{x_{k-1},x_k\}$. Έστω b_i είναι το πλήθος των κορυφών του P_d ανάμεσα στα x_{i-1} και x_i, για $i = 1,2,\cdots,k$, όπου έχουμε θέσει $x_0 = x_k$. Θέτουμε $a(o) = (a_1,a_2,\cdots,a_k)$, όπου $a_i = b_i + 1$. Τότε το $a(o)$ είναι σύνθεση του d και ισχύει $a_1 \geq 1$, $a_i \geq 2$, για $i = 2,\cdots,k$. Έστω $\lambda(o)$ η διαμέριση του d που αντιστοιχεί στην $a(o)$. Για $\lambda \vdash d$, έστω $\mathrm{Sink}(G,\lambda) = \{o \in AO(G) : \lambda(o) = \lambda\}$ και για $a \vDash d$ $\mathrm{Sink}(G,a) = \{o \in AO(G) : a(o) = a\}$

Πρόταση 3.2.12. Για το γράφημα P_d ισχύει $c_\lambda = \#\mathrm{Sink}(P_d,\lambda)$ για $\lambda \vdash d$.
Απόδειξη
Έστω $\mathrm{Sink}(G,S)$ το σύνολο των άκυκλων προσανατολισμών του G με σύνολο βυθισμάτων S, για $S \subseteq V(G)$.

- $\operatorname{sink}(P_d, \{1, d\}) = d - 2$ για $d \geq 3$
  Το δείχνουμε με επαγωγή στο d. Για $d = 3$ υπάρχει μοναδικός άκυκλος προσανατολισμός του P_3 με βυθίσματα τα $1, 3$. Έστω ότι ισχύει για $d \leq n - 1$. Θεωρούμε άκυκλο προσανατολισμό $o \in \operatorname{Sink}(P_n, \{1, n\})$. Αφαιρώντας τις κορυφές 1 και n προκύπτει άκυκλος προσανατολισμός του $P_n \setminus \{1, n\}$ με σύνολο βυθισμάτων $\{2\}, \{n-1\}$ ή $\{2, n-1\}$. Αντίστροφα αν o άκυκλος προσανατολισμός του $P_n \setminus \{1, n\}$ με σύνολο βυθισμάτων $\{2\}, \{n - 1\}$ ή $\{2, n - 1\}$, βρίσκουμε άκυκλο προσανατολισμό του P_n με βυθίσματα 1 και d προσανατολίζοντας $2 \to 1$ και $n - 1 \to n$.
  Άρα $\operatorname{sink}(P_n, \{1, n\}) = \operatorname{sink}(P_{n-2}, \{1, n-2\}) + \operatorname{sink}(P_{n-2}, \{1\}) + \operatorname{sink}(P_{n-2}, \{n-2\}) = (n - 4) + 1 + 1 = n - 2$

- $\#\operatorname{Sink}(G, \lambda) = \sum_{a \in \mathfrak{S}(r_1, r_2, \cdots)} \#\operatorname{Sink}(G, a)$,
  όπου $\lambda = \langle 1^{r_1}, 2^{r_2} \cdots \rangle$.

- $\#\operatorname{Sink}(G, a) = a_1(a_2 - 1) \cdots (a_m - 1)$, $m = 2, \cdots, \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$
  Έστω $x_1 < x_2 < \cdots < x_k \in [d]$ με $x_2 - x_1 = a_2, \cdots, x_k - x_{k-1} = a_k$ και $d + x_1 - x_k = a_1$. Υπάρχουν ακριβώς $(a_2 - 1) \cdots (a_k - 1)$ άκυκλοι προσανατολισμοί του G με βυθίσματα τα $x_1, x_2, \cdots, x_k$. Πράγματι

  - Για $i = 1, 2, \cdots, x_1 - 1$ προσανατολίζω $i \to i + 1$
  - Για $i = x_k, \cdots, d - 1$ προσανατολίζω $i + 1 \to i$
  - Για $i = 1, 2, \cdots, k - 1$ επιλέγουμε έναν από τους $a_{i+1} - 1$ άκυκλους προσανατολισμούς του μονοπατιού $x_i - \cdots - x_{i+1}$ με βυθίσματα x_i και x_{i+1}.

  Τέλος υπάρχουν a_1 τρόποι να επιλέξουμε μια ακολουθία $x_1 < x_2 < \cdots < x_k \in [d]$ με $x_2 - x_1 = a_2, \cdots, x_k - x_{k-1} = a_k$ και $d + x_1 - x_k = a_1$. Πράγματι επιλέγουμε το x_k ανάμεσα στα $d - a_1 + 1 \cdots, d - 1, d$ και στη συνέχεια επιλέγουμε τα $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$ με 1 τρόπο.

$\square$

Πρόσφατα αποδείχτηκε και η e-θετικότητα των γραφημάτων TL_d από την S. Dahlberg, με τη χρήση χρωματικών συμμετρικών συναρτήσεων σε μεταβλητές που δεν μετατίθενται. Το πλεονέκτημα αυτών των χρωματικών συμμετρικών συναρτήσεων, σε σχέση με τις συνήθεις, είναι ότι ικανοποιούν ένα νόμο διαγραφής-συστολής, ανάλογο με αυτόν του χρωματικού πολυωνύμου. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στα [20],[11],[7].
Ο Stanley απέδειξε επιπλέον την e-θετικότητα μιας οικογένειας γραφημάτων που δεν περιλαμβάνονται στην προηγούμενη κατηγορία, των κύκλων.

Θεώρημα 3.2.13.

$$\sum_{d \geq 1} X_{C_d} t^d = \frac{\sum_{i \geq 2} i(i-1) e_i t^i}{1 - \sum_{i \geq 2} (i-1) e_i t^i}$$

άρα το C_d ειναι e-θετικό.
Απόδειξη

Έστω $V_d = \{v_1, \cdots, v_d\}$ και $E_d = \{\{v_i, v_{i+1}\} : i = 0, \cdots, d-1\}$, $d \geq 2$.
Για $n \in \mathbb{N}$ και $i \neq j$ ορίζουμε $X^{i,j}_{P_d}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\kappa} x_{\kappa(v_1)} \cdots x_{\kappa(v_d)}$, όπου το κ διατρέχει τους γνήσιους χρωματισμούς του P_d με n χρώματα και $\kappa(v_1) = i, \kappa(v_d) \neq j$
και $X^{i}_{C_d}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\kappa} x_{\kappa(v_1)} \cdots x_{\kappa(v_d)}$, όπου το κ διατρέχει τους γνήσιους χρωματισμούς του C_d με n χρώματα και $\kappa(u_1) = i$.
Επίσης $X_{C_d}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\kappa} x_{\kappa(v_1)} \cdots x_{\kappa(v_d)}$, όπου το κ διατρέχει τους γνήσιου χρωματισμούς του C_d με n χρώματα.
Για $d \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τον τετραγωνικό πίνακα $A_d = (A_d(i,j))_{i,j}$, με

$$A_d(i,j) = \begin{cases} X^{i,j}_{P_d}, i \neq j \\ X^{i}_{C_d}, i = j \end{cases}$$

και κατά σύμβαση $A_0 = I_d$. Παρατηρύμε ότι $A_1 = A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & 0 & \cdots & x_2 \\ \cdots & & & \\ x_n & x_n & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
Θα αποδείξουμε ότι για κάθε d ισχύει $A_d = A^d$. Πράγματι, για $d \geq 2$ έχουμε:

$$X^{i}_{C_d} = \sum_{k \neq i} x_k X^{i,k}_{P_{d-1}}$$

$$X^{i,j}_{P_d} = \sum_{k \neq i,j} x_k X^{i,k}_{P_{d-1}} + x_i X^{i}_{C_{d-1}},\ i \neq j$$

Παρατηρούμε ότι $X_{C_d} = \sum_{i=1}^{n} X^{i}_{D_d} = trA_d = trA^d$.
Έστω $w_1, \cdots, w_r$ οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του A_1 και m η πολλαπλότητα του 0. Τότε $trA^d = w_1^d + \cdots + w_r^d$ άρα
$\sum_{d \geq 1} X_{C_d} t^d = \sum_{d \geq 1} (w_1 t)^d + \cdots + \sum_{d \geq 1} (w_l t)^d = \frac{w_1 t}{1 - w_1 t} + \cdots + \frac{w_l t}{1 - w_l t}$.
Αν $D(t) = \det(I - tA)$ τότε $D(t) = (-1)^n t^n X_A(\frac{1}{t})$, όπου $X_A(t) = (-1)^n t^m (t - w_1) \cdots (t - w_r)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Άρα $D(t) = t^n (\frac{1}{t})^m (\frac{1}{t} - w_1) \cdots (\frac{1}{t} - w_r) = (1 - w_1 t) \cdots (1 - w_r t)$ επομένως $\sum_{d \geq 1} X_{C_d} t^d = -\frac{tD'(t)}{D(t)}$. Θα δείξουμε ότι

$$D(t) = 1 - \sum_{i=2}^{n} (i-1) e_i t^i \tag{3.8}$$

επομένως $\sum_{d \geq 1} X_{C_d}(x_1, \cdots, x_n) t^d = \frac{\sum_{i \geq 2} i(i-1) e_i(x_1, \cdots, x_n) t^i}{1 - \sum_{i \geq 2} (i-1) e_i(x_1, \cdots, x_n) t^i}$ και το αποτέλεσμα έπεται για $n \longrightarrow \infty$.

$$I - tA = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 t & \cdots & -x_1 t \\ -x_2 t & 1 & \cdots & -x_2 t \\ \cdots & & & \\ -x_n t & -x_n t & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j} \text{ άρα}$$

$$D(t) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{w \in \mathfrak{S}_n, \mathrm{fix}(w) = n-k} \epsilon_w a_{1w_1} \cdots a_{nw_n} \right) \text{ όπου}$$

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n, \mathrm{fix}(w)=n-k} \epsilon_w a_{1w_1} \cdots a_{nw_n} = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ \mathrm{Fix}(w) = [n] \setminus \{j_1, \cdots, j_k\}}} \epsilon_w a_{1w_1} \cdots a_{nw_n} =$$

$$= \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} (-1)^k x_{j_1} \cdots x_{j_k} t^k \sum_{w \in D_k} \epsilon_w = -(k-1) e_k(x_1, \cdots, x_n) t^k$$

γιατί $\sum_{w \in D_k} = (-1)^{k-1}(k-1)$ και επομένως η σχέση (3.8) έπεται.

Η σχέση $\sum_{w \in D_k} \varepsilon_w = (-1)^{k-1}(k-1), k \ge 2$ αποδεικνύεται με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού ως εξής:

Έστω $S_i = \{w \in \mathfrak{S}_k : w_i = i\}$, $f(S) = \sum_{\substack{w \in S_i \\ \text{ανν } i \in S}} \varepsilon_w$ και $g(S) = \sum_{\substack{w \in S_i \\ \text{αν } i \in S}} \varepsilon_w = \sum_{\substack{w \in \cap S_i \\ i \in S}} \varepsilon_w$ για $S \subseteq [k]$.

Τότε $g(S) = \sum_{S \subseteq T \subseteq [k]} f(T)$ άρα $f(S) = \sum_{S \subseteq T \subseteq [k]} (-1)^{\# T \setminus S} g(T)$ άρα

$$\sum_{w \in D_k} \varepsilon_w = f(\emptyset) = \sum_{T \subseteq [k]} (-1)^{\# T} g(T) = \sum_{T \subseteq [k]} (-1)^{\# T} \sum_{\substack{w_i = i \\ \text{αν } i \in T}} \varepsilon_w =$$

$$= \sum_{T \subseteq [k]} (-1)^{\# T} \sum_{w \in \mathfrak{S}_{[k] \setminus T}} \varepsilon_w = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{w \in \mathfrak{S}_{k-i}} \varepsilon_w =$$

$$= (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} \sum_{w \in \mathfrak{S}_1} \varepsilon_w + (-1)^k \binom{k}{k} \sum_{w \in \mathfrak{S}_0} \varepsilon_w = (-1)^{k-1}(k-1)$$

□

$$\sum_{d \ge 1} X_{C_d} t^d = \left[\sum_{i \ge 2} i(i-1) e_i t^i \right] \left[\sum_{i \ge 0} \left(\sum_{j \ge 2} (j-1) e_j t^j \right)^i \right] =$$

$$[2e_2 t^2 + 6 e_3 t^3 + 12 e_4 t^4 + \cdots] \left[1 + (e_2 t^2 + 2 e_3 t^3 + 3 e_4 t^4 + \cdots) + (e_2 t^2 + 2 e_3 t^3 + 3 e_4 t^4 + \cdots)^2 + \cdots \right]$$

$$= 2 e_2 e_{(2)} t^2 + 6 e_{(3)} t^3 + (12 e_{(4)} + 2 e_{(2,2)}) t^4 + \cdots$$

Πόρισμα 3.2.14.

$$X_{C_d}(x) = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \sum_{k_1, k_2, \cdots, k_m \ge 2, k_1 + \cdots + k_m = d} k_1 (k_1 - 1)(k_2 - 1) \cdots (k_m - 1) e_{(k_1, k_2, \cdots, k_m)}$$

Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) = \langle 1^{r_1}, 2^{r_2}, \cdots \rangle$. Τότε:

$$c_\lambda = \begin{cases} d, \text{ αν } \lambda = (d) \\ \sum\limits_{a \in \mathfrak{S}(r_1, r_2, \cdots)} a_1(a_1 - 1)(a_2 - 1) \cdots (a_m - 1), \text{ αν } m = 2, \cdots, \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor \\ 0, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

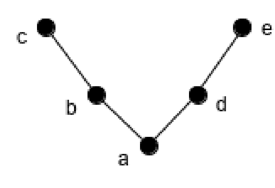
όπου $\mathfrak{S}(r_1, r_2, \cdots)$ είναι το σύνολο των μεταθέσεων της συλλογής $\{1^{r_1}, 2^{r_2}, \cdots\}$.
Το προηγούμενο αποτέλεσμα της e-θετικότητας φαίνεται να μπορεί να γενικευτεί στην περίπτωση που το G είναι ένωση κλικών σε μια οικογένεια διαστημάτων του $V = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε την οικογένεια διαστημάτων $\{[1, 2], [2, 3], \cdots, [d, 1]\}$ στο $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ προκύπτει ο κύκλος C_d. Παίρνουμε δηλαδή ένα κυκλικό ανάλογο της εικασίας Stanley-Stembridge.

3.3 Ανάπτυγμα στη Βάση των Συναρτήσεων Schur

Όπως είδαμε η εικασία των Stanley-Stembridge παραμένει ανοιχτή. Η ασθενέστερη συνθήκη της Schur-θετικότητας ήταν γνωστή από τη δουλεία του Haiman πάνω σε άλγεβρες Hecke[15]. O Gasharov[10] έδωσε μια απλούστερη απόδειξη της Schur-θετικότητας, δίνοντας επιπλέον μια συνδυαστική ερμηνεία των συντελεστών. Για το σκοπό αυτό γενίκευσε την ένοια των γενικευμένων Young ταμπλώ, ώστε να περιέχουν στοιχεία ενός τυχαίου μερικώς διατεταγμένου συνόλου.

Ορισμός 3.3.1. Έστω P πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο με d στοιχεία και λ διαμέριση του d. P-ταμπλώ σχήματος λ ονομάζουμε μια 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των τετραγώνων του Y_λ στο P, τέτοια ώστε:

- Τα στοιχεία κάθε γραμμής αυξάνουν αυστηρά προς τα δεξιά
- Αν το v βρίσκεται ακριβώς κάτω από το u, τότε $v \not<_P u$



Σχήμα 3.4: P

Για παράδειγμα, αν P είναι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο του σχήματος τότε το

$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & \\ \cline{1-2} \end{array}$ είναι P-ταμπλώ.

Θεώρημα 3.3.2. Αν το P είναι $(3+1)$-ελεύθερο, τότε

$$X_{\mathrm{inc}(P)} = \sum_{\lambda \vdash d} f^\lambda(P) s_\lambda$$

όπου $f^\lambda(P)$ είναι το πλήθος των P-ταμπλώ σχήματος λ.
Στην ειδική περίπτωση που το P είναι αλυσίδα με d στοιχεία προκύπτει η γνωστή σχέση

$$(x_1 + x_2 + \cdots)^d = \sum_{\lambda \vdash d} f^\lambda s_\lambda$$

η οποία αποδεικνύεται με την χρήτη της αντιστοιχίας RSK.
Απόδειξη
Έστω $X_G(x) = \sum_{\lambda \vdash d} d_\lambda s_\lambda$. Θα δείξουμε ότι $d_\lambda = f^\lambda(P)$.

- $X_G = \sum_{\lambda \vdash d} \beta_\lambda m_\lambda$, όπου β_λ το πλήθος των γνήσιων χρωματισμών του G τύπου λ. Τότε ισχύει $\langle X_G, h_\lambda \rangle = \beta_\lambda$, για κάθε $\lambda \vdash d$.
- $\langle X_G, s_\lambda \rangle = d_\lambda$, για κάθε $\lambda \vdash d$
- $s_\lambda = \sum_{w \in \mathfrak{S}_l} \epsilon_w h_{w(\lambda)}$ (ταυτότητα Jacobi-Trudi)
  όπου $w(\lambda) = \{\lambda_{w_j} - w_j + j\}_{j=1}^l$, για $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l)$, με $h_0 = 1$ και $h_i = 0$ για $i < 0$
- $d_\lambda = \langle X_G, s_\lambda \rangle = \sum_{w \in \mathfrak{S}_l} \epsilon_w \langle h_{w(\lambda)}, X_G \rangle = \sum_{w \in \mathfrak{S}_l} \epsilon_w \beta_{w(\lambda)}$ όπου $\beta_w(\lambda) = 0$ αν $\lambda_{w_j} - w_j + j < 0$ για κάποιο j.

Θα ορίσουμε τώρα μια έννοια γενικότερη του P-ταμπλώ. P-παράταξη ονομάζουμε μια παράταξη στοιχείων του P οργανωμένων σε αριστερά στοιχισμένες γραμμές, έτσι ώστε το καθένα να εμφανίζεται ακριβώς μια φορά. Επιπλέον θέλουμε $a_{i,j} <_P a_{i,j+i}$ όταν τα $a_{i,j}, a_{i,j+i}$ ορίζονται. Για $j \in P$ έστω a_j το πλήθος των στοιχείων της j γραμμής. Τότε λέμε ότι το J έχει σχήμα $a = (a_1, a_2, \cdots)$.
Άρα μια P-παράταξη θα είναι P-ταμπλώ όταν ισχύει το εξής:
Αν $i, j \geq 1$ και το $a_{i+1,j}$ ορίζεται, τότε θα ορίζεται και το $a_{i,j}$ και θα ισχύει $a_{i+1,j} \not<_P a_{i,j}$.
Έστω $\Pi_{P,a}$ το σύνολο των P-παρατάξεων σχήματος a. Ορίζουμε 1-1 αντιστοιχία $\phi_{P,a}$ ανάμεσα στο $K_a(G)$ και το $\Pi_{P,a}$. Έστω κ γνήσιος χρωματισμός του G τύπου a. Για $j \in \mathbb{N}$ έστω $A_j = \{p \in P : \kappa(p) = j\}$. Κάθε A_j είναι ευσταθές υποσύνολο του G, άρα αποτελεί αλυσίδα του P. Σχηματίζουμε παράταξη του P σχήματος a τοποθετώντας στην j γραμμή τα στοιχεία του A_j σε αύξουσα σειρά, για $j \in \mathbb{N}$. Αντίστροφα, αν T είναι $P-$παράταξη σχήματος a, χρωματίζουμε τα στοιχεία της j γραμμής με το χρώμα j, για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Τα στοιχεία κάθε γραμμής αποτελούν αλυσίδα, άρα προκύπτει γνήσιος χρωματισμός τύπου a. Άρα $d_\lambda = \sum_{w \in \mathfrak{S}_l} \epsilon_w \#\Pi_{P,\omega(\lambda)}$.
Έστω A το σύνολο των ζευγών (w, T), όπου $w \in \mathfrak{S}_l$ και $T \in \Pi_{P,w(\lambda)}$. Τότε

$$d_\lambda = \sum_{(w,T) \in A} \epsilon_w$$

Θέτουμε C το σύνολο των $(w,T) \in A$ με T P-ταμπλώ και $B = A \setminus C$. Αν $(w,T) \in C$ η $w(l)$ είναι διαμέριση, άρα για κάθε $i \in [l-1]$ ισχύει $\lambda_{w_i} - w_i + i \geq \lambda_{w_{i+1}} - w_{i+1} + i + 1$ άρα $\lambda_{w_{i+1}} - \lambda_{w_i} < w_{i+1} - w_i$. Αν $w_{i+1} < w_i$ για κάποιο i έπεται $\lambda_{w_{i+1}} < \lambda_{w_i}$. Άτοπο, γιατί η λ είναι διαμέριση. Άρα $w = 1$ και $\sum_{(w,t)\in C} \epsilon_w = f^\lambda(P)$. Επομένως

$$d_\lambda = f_\lambda(P) + \sum_{(w,t)\in B} \epsilon_w$$

Θα ορίσουμε αυτοαντίστροφη απεικόνιση $\phi : B \longrightarrow B$ τέτοια ώστε αν $\phi(w,T) = \phi(w',T')$ να ισχύει $\epsilon_w = -\epsilon_{w'}$ και το ζητούμενο $d_\lambda = f^\lambda(P)$ έπεται.
Έστω $(w,T) \in B$. Το T δεν είναι P-ταμπλώ, άρα υπάρχει $j \geq 1$ για το όποιο υπάρχει $i \geq 1$ ώστε το $a_{i+1,j}$ ορίζεται και είτε το $a_{i,j}$ δεν ορίζεται είτε $a_{i+1,j} <_P a_{i,j}$. Ονομάζουμε $c = c(T)$ τον μικρότερο ακέραιο j για τον οποίο υπάρχει τέτοιο i. Για το c επιλέγουμε τον μεγαλύτερο ακέραιο i για τον οποίο το $a_{i,c}$ δεν ορίζεται ή $a_{i+1,c} <_P a_{i,c}$ και τον ονομάζουμε $r = r(T)$.

Αν $T = \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots \\ \cdots & & \end{matrix}$ ορίζουμε $T' = \begin{matrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots \\ \cdots & & \end{matrix}$

με $b_{i,j} = a_{i,j}$ αν $i \neq r, r+1$ ή $i = r, j \leq c-1$ ή $i = r+1, j \leq c$
$b_{r,j} = a_{r+1,j+1}$ αν $j \geq c$ και το $a_{r+1,j+1}$ ορίζεται
$b_{r+1,j} = a_{r,j-1}$ αν $j \geq c+1$ και το $a_{r,j-1}$ ορίζεται

Δηλαδή ο T' προκύπτει από τον T αλλάζοντας τα στοιχεία της r γραμμής από την στήλη c και μετά με τα στοιχεία της $r+1$ γραμμής από τη στήλη $c+1$ και μετά.

$T = \begin{array}{c|ccccc} r & \cdots a_{r,c-1} & a_{r,c} & a_{r,c+1} & \cdots \\ r+1 & \cdots a_{r+1,c-1} & a_{r+1,c} & a_{r+1,c+1} & \cdots \end{array}$ $T' = \begin{array}{c|ccccc} r & \cdots a_{r,c-1} & a_{r+1,c+1} & a_{r+1,c+2} & \cdots \\ r+1 & \cdots a_{r+1,c-1} & a_{r+1,c} & a_{r,c} & \cdots \end{array}$

Ορίζουμε επίσης $w' = w \circ (r\, r+1)$ και θέτουμε $\phi(w,T) = (w',T')$. Τότε:

1. $\epsilon_w = -\epsilon_{w'}$

2. Το T' είναι $P-$παράταξη. Αρκεί να δείξουμε ότι:
   $a_{r+1,c} <_P a_{r,c}$ αν το $a_{r,c}$ ορίζεται και $a_{r,c-1} <_P a_{r+1,c+1}$ αν το $a_{r+1,c+1}$ ορίζεται
   Από τον ορισμό των r, c προκύπτει ότι αν το $a_{r,c}$ ορίζεται ισχύει $a_{r,c} >_P a_{r+1,c}$. Επιπλέον το $a_{r,c-1}$ ορίζεται και $a_{r,c-1} \not>_P a_{r+1,c-1}$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

   (α΄) $a_{r,c-1} \leq_P a_{r+1,c-1}$. Τότε $a_{r,c-1} \leq_P a_{r+1,c-1} <_P a_{r+1,c} <_P a_{r+1,c+1}$ άρα $a_{r,c-1} <_P a_{r+1,c+1}$

   (β΄) $a_{r,c-1} \parallel_P a_{r+1,c-1}$. Το P είναι (3+1)-ελεύθερο και $a_{r+1,c-1} <_P a_{r+1,c} <_P a_{r+1,c+1}$ άρα $a_{r,c-1} <_P a_{r+1,c+1}$.

3. Το T' δεν είναι P-ταμπλώ
   Αν το $a_{r+1,c+1}$ ορίζεται ισχύει $a_{r+1,c} <_P a_{r+1,c+1}$

4. Το σχήμα του T' είναι $w'(\lambda)$
   Η r γραμμή του T έχει $\lambda_{w_r} - w_r + r$ στοιχεία και η $r+1$ έχει $\lambda_{w_{r+1}} - w_{r+1} + r + 1$. Η r γραμμή του T' έχει $(\lambda_{w_{r+1}} - w_{r+1} + r + 1) - 1 = \lambda_{w'_r} - w'_r + r$ στοιχεία και η $r+1$ γραμμή του έχει $(\lambda_{w_r} - w_r + r) + 1 = \lambda_{w'_{r+1}} - w'_{r+1} + r + 1$.

5. $\phi(w', T') = (w, T)$
   Πράγματι $c(T') = c(T)$ και $r(T') = r(T)$

□

Δώσαμε στην προηγούμενη ενότητα παράδειγμα γραφήματος που δεν περιέχει το $K_{3,1}$ ως υπογράφημα αλλά δεν είναι e-θετικό(σχήμα(3.3)). Αν υπολογίσουμε όμως το ανάπτυγμα της χρωματικής συμμετρικής συνάρτησης αυτού του γραφήματος στις συναρτήσεις Schur βρίσκουμε ότι είναι Schur-θετική. Υπάρχουν γενικότερα ενδείξεις για την Schur-θετικότητα των $K_{3,1}$-ελεύθερων γραφημάτων(Stanley[30]).

Εικασία 3.3.3. Αν το G δεν περιέχει το $K_{3,1}$ ως επαγόμενο υπογράφημα, τό $X_G(x)$ είναι Schur-θετικό.

Τα Schur-θετικά γραφήματα ικανοποιούν την εξής συνδυαστική ιδιότητα. Αν υπάρχει ευσταθής διαμέριση τύπου λ και $\mu \trianglelefteq \lambda$ μια άλλη διαμέριση, τότε θα υπάρχει και ευσταθής διαμέριση τύπου μ. Ένα τέτοιο γράφημα θα ονομάζεται καλό. Παρατηρούμε ότι το $K_{3,1}$ δεν είναι καλό, γιατί έχει ευσταθή διαμέριση τύπου $(3,1)$ αλλά όχι τύπου $(2,2)$.

Πρόταση 3.3.4. Κάθε Schur-θετικό γράφημα είναι καλό.
Απόδειξη

Έστω $X_G = \sum_{\lambda \vdash d} d_\lambda s_\lambda$ με $d_{\lambda \geq 0}$. Τότε $X_G = \sum_{\lambda \vdash d} d_\lambda \left(\sum_{\mu \vdash d} K_{\lambda\mu} m_\mu \right) = \sum_{\lambda \vdash d} \left(\sum_{\mu \vdash d} K_{\mu\lambda} d_\mu \right) m_\lambda$, άρα $\alpha_\lambda = \sum_{\mu \vdash d} K_{\mu\lambda} d_\mu$. Έστω $\lambda, \nu \vdash d$ με $\alpha_\lambda > 0$ και $\nu \trianglelefteq \lambda$. Τότε υπαρχει $\mu_0 \vdash d$ με $d_{\mu_0} > 0$ και $\mathrm{K}_{\mu_0\lambda} > 0$, επομένως $\mu_0 \trianglerighteq \lambda$. Άρα $\mu_0 \trianglerighteq \nu$, οπότε $\mathrm{K}_{\mu_0\nu} > 0$. Αφού $d_\mu > 0$ για κάθε $\mu \vdash d$ έπεται ότι

$$\alpha_\nu = \sum_{\mu \vdash d} d_\mu K_{\mu\nu} \geq \mathrm{K}_{\mu_0\nu} d_{\mu_0} > 0$$

.

□

Πρόταση 3.3.5. Ένα γράφημα είναι $K_{3,1}$-ελεύθερο ανν κάθε επαγόμενο υπογράφημά του είναι καλό.
Απόδειξη
Αν κάθε επαγόμενο υπογράφημα του G είναι καλό, τότε το G δεν θα περιέχει ως επαγόμενο υπογράφημα το $K_{3,1}$, το οποίο είδαμε ότι δεν είναι καλό. Έστω τώρα G $K_{3,1}$-ελεύθερο. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $\lambda, \mu \vdash d$ με $\alpha_\lambda > 0$ και η λ καλύπτει τη μ με τη διάταξης της κυριαρχίας, τότε $\alpha_\mu > 0$. Αφού η λ καλύπτει τη μ, έπεται ότι η μ προκύπτει από την λ αφαιρώντας 1 από κάποιο μέρος λ_i της λ και προσθέτοντας 1 σε κάποιο μέρος λ_j με $i > j$ και $\lambda_j \leq \lambda_i - 2$.
Αφού $\alpha_\lambda > 0$ υπάρχει ευσταθής διαμέριση π του $V(G)$ τύπου λ. Έστω A, B μέρης της π με πληθαρίθμους λ_i και λ_j αντίστοιχα. Έστω H το επαγόμενο υπογράφημα του G στο $A \cup B$. Το H είναι διμερές και $K_{3,1}$-ελεύθερο άρα κάθε κορυφή του έχει βαθμό το πολύ 2. Άρα κάθε συνεκτική συνιστώσα του H είναι μονοπάτι ή κύκλος που οι κορυφές του εναλλάσσονται ανάμεσα στα A και B. Αφού $\#A > \#B$ υπάρχει συνεκτική συνιστώσα του H που είναι μονοπάτι της μορφής $a_1 - b_1 - a_2 - \cdots - a_n$ με $a_i \in A$, $b_i \in B$ και $a_1 \neq a_n$.

Θέτουμε $A' = \{b_1, \cdots, b_{n-1}\} \cup A \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$ και $B' = \{a_1, \cdots, a_n\} \cup B \setminus \{b_1, \cdots, b_{n-1}\}$. Τότε $\#A' = \lambda_i - 1$ και $\#B' = \lambda_j + 1$ και είναι ευσταθή. Ορίζουμε διαμέριση π' του d αντικαθιστώντας το A με το A' και το B με το B'. Τότε $\text{type}(\pi') = \mu$, άρα $\alpha_\mu > 0$.

□

3.4 Το Θεώρημα του Guay-Paquet

Επιπλέον πρόοδος στην απόδειξη της εικασίας Stanley-Stembridge έγινε το 2013 από τον Guay-Paquet[12]. Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση των $(3+1)$-ελεύθερων μερικώς διατεταγμένων συνόλων που περιγράψαμε στο πρώτο κεφάλαιο, έδειξε ότι η συμμετρική χρωματική συνάρτηση ενός $(3+1)$-ελεύθερου μερικώς διατεταγμένου συνόλου γράφεται σαν κυρτός γραμμικός συνδυασμός των συμμετρικών χρωματικών συναρτήσεων φυσικών unit interval γραφημάτων. Κατάφερε έτσι να περιορίσει την εικασία Stanley-Stembridge σε μια μικρότερη κλάση γραφημάτων. Η εικασία Stanley-Stembridge γίνεται τώρα ισοδύναμη με την παρακάτω.

Εικασία 3.4.1. Αν G είναι φυσικό unit interval γράφημα τότε το X_G είναι e-θετικό.

Περιγράφουμε τώρα τον κανόνα πηλίκο που χρησιμοποίησε. Αν L λέξη στο αλφάβητο Σ συμβολίζουμε με X_L την χρωματική συμμετρική συνάρτηση του γραφήματος $\text{inc}(P_L)$. Έστω τώρα A, B λέξεις στο Σ και G δίχρωμο γράφημα. Έστω ότι το G περιέχει δύο ακμές e_1, e_2 με κοινή κορυφή, δηλαδή $e_1 = \{x, y\}$ και $e_2 = \{z, y\}$, για κάποια x, y, z. Θεωρούμε τα γραφήματα $G_1 = G \setminus e_1$,$G_2 = G \setminus e_2$,$G_{12} = G \setminus \{e_1, e_2\}$ και τις λέξεις
$L = Ab_{i,i+1}(G)B, L_1 = Ab_{i,i+1}(G_1)B, L_2 = Ab_{i,i+1}(G_2)B, L_{12} = Ab_{i,i+1}(G_{12})B.$

Θεώρημα 3.4.2.

$$X_L + X_{L_{12}} = X_{L_1} + X_{L_2} \tag{3.9}$$

Απόδειξη
Έστω $V = V(L)$. Θα δείξουμε ότι κάθε χρωματισμός $\kappa : V \to \mathbb{P}$ συνεισφέρει το ίδιο και στα δύο μέλη της (3.9). Έστω K, K_1, K_2, K_{12} τα σύνολα των γνήσιων χρωματισμών των γραφημάτων $\text{inc}(P_L), \text{inc}(P_{L_1}), \text{inc}(P_{L_2})$ και $\text{inc}(P_{L_{12}})$ αντίστοιχα. Ένας χρωματισμός κ συνισφέρει σε τουλάχιστον μια χρωματική συμμετρική συνάρτηση ανν ανήκει στο K. Έστω $\kappa \in K$. Τότε $\kappa(x) \neq \kappa(z)$, γιατί $\{x, z\} \in \text{inc}(P_L)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\kappa(x) = \kappa(y)$ έπεται ότι $\kappa \in K, K_2$ αλλά $\kappa \notin K_1, K_{12}$. Άρα συνεισφέρει μια φορά σε κάθε μέλος της (3.9)

- Αν $\kappa(z) = \kappa(y)$ έπεται ότι $\kappa \in K, K_1$ αλλά $\kappa \notin K_2, K_{12}$. Άρα συνεισφέρει μια φορά σε κάθε μέλος της (3.9)

- Αν $\kappa(x) \neq \kappa(y)$ και $\kappa(z) \neq \kappa(y)$ έπεται ότι $\kappa \in K, K_2, K_1, K_{12}$. Άρα συνεισφέρει δύο φορές σε κάθε μέλος της (3.9)

□

Έστω $L_{\mathbb{Q}}$ ο $\mathbb{Q}$-διανυσματικός χώρος των τυπικών γραμμικών συνδυασμών από λίστες μερών. Θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $L + L_{12} \sim_M L_1 + L_2$, όταν οι λέξεις L, L_1, L_2, L_{12} είναι όπως πριν και την επεκτείνουμε γραμμικά. Παίρνουμε έτσι τον χώρο πηλίκο $L_{\mathbb{Q}} \setminus \sim_M$.
Για $a = a_1L_1 + a_2L_2 + \cdots + a_kL_k \in L_{\mathbb{Q}}$ ορίζουμε $X_a = a_1X_{L_1} + a_2X_{L_2} + \cdots + a_kX_{L_k} \in \Lambda^{\mathbb{Q}}$. Παρατηρούμε ότι αν $a \sim_M b$ ή $a \sim_P b$ ισχύει $X_a = X_b$.
Έστω $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Συμβολίζουμε με V_r^s τον $\mathbb{Q}$-διανυσματικό χώρο των τυπικών γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του συνόλου $\{b_{1,2}(G) : G \text{ δίχρωμο γράφημα με } \#B_G = r, \#T_G = s\}$, όπου B_G η βάση και T_G η κορυφή του G, modulo τη σχέση $\sim_M$.

Έστω $U_k = \overline{u_2^{s-k}u_1^r u_2^s} \in V_r^s$ για $k = 0, 1, \cdots, s$ (γράφημα udu)

και $D_k = \overline{u_1^k u_2^s u_1^{r-k}} \in V_r^s$ για $k = 0, 1, \cdots, r$ (γράφημα dud)

Ορίζουμε γραμμική απεικόνιση $F_k : V_r^s \to \mathbb{Q}$ ως εξής:
Έστω G δίχρωμο γράφημα με $\#B = r, \#T = s$ και M ένα τυχαίο ταίριασμα του πλήρους διμερούς γραφήματος στα σύνολα κορυφών B_G και T_G με $\min\{r, s\}$ ακμές, το οποίο επιλέγεται ομοιόμορφα και τυχαία από όλα τα $\dfrac{\max\{r, s\}}{|r - s|!}$ ταιριάσματα. Τότε το $F_k(b_{1,2}(G))$ είναι η πιθανότητα το G και το M να έχουν ακριβώς k κοινές ακμές. Δηλαδή

$$F_k(b_{1,2}(G)) = \frac{a_{r,s}^k(G)}{a_{r,s}}$$

όπου $a_{r,s}$ το πλήθος όλων των ταιριασμάτων και $a_{r,s}^k(G)$ το πλήθος των ταιριασμάτων που έχουν ακριβώς k κοινές ακμές με το G.
Η συνάρτηση F_k είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση γιατί τα $b_{1,2}(G)$ παράγουν τον V_r^s και η F_k σέβεται τη σχέση $b_{1,2}(G) + b_{1,2}(G_{12}) \sim_M b_{1,2}(G_1) + b_{1,2}(G_2)$. Πράγματι $F_k(b_{1,2}(G)) + F_k(b_{1,2}(G_{12})) \sim_M F_k(b_{1,2}(G_1)) + F_k(b_{1,2}(G_2))$. Ισοδύναμα

$$a_{r,s}^k(G) + a_{r,s}^k(G_{1,2}) = a_{r,s}^k(G_1) + a_{r,s}^k(G_2) \tag{3.10}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι ένα ταίριασμα συνεισφέρει το ίδιο και στα δύο μέρη της (3.10). Ένα ταίριασμα περιέχει το πολύ μία από τις ακμές e_1, e_2. Έστω ταίριασμα M. Για να συνεισφέρει πρέπει να έχει ακριβώς $k - 1$ ή k κοινές ακμές με το G_{12}.

- Αν το M έχει k ακριβώς κοινές ακμές με το G_{12} και δεν περιέχει τις e_1, e_2, τότε συνεισφέρει σε όλα
- Αν το M έχει k ακριβώς κοινές ακμές με το G_{12} και περιέχει την e_1 τότε συνεισφέρει στα $a_{r,s}^k(G_{1,2})$ και $a_{r,s}^k(G_1)$
- Αν το M έχει k ακριβώς κοινές ακμές με το G_{12} και περιέχει την e_2 τότε συνεισφέρει στα $a_{r,s}^k(G_{1,2})$ και $a_{r,s}^k(G_2)$
- Αν το M έχει $k-1$ ακριβώς κοινές ακμές με το G_{12} και περιέχει την e_1 τότε συνεισφέρει στα $a_{r,s}^k(G)$ και $a_{r,s}^k(G_2)$

- Αν το M έχει $k-1$ ακριβώς κοινές ακμές με το G_{12} και περιέχει την e_2 τότε συνεισφέρει στα $a^k_{r,s}(G)$ και $a^k_{r,s}(G_1)$

Θεώρημα 3.4.3.

1. Οι συναρτήσεις $F_k, k = 0, 1, \cdots, \min\{r, s\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου των $\mathbb{Q}$-γραμμικών συναρτήσεων $F : V^s_r \to \mathbb{Q}$

2. Αν $r \geq s$, ισχύει
$$F_j(U_k) = \begin{cases} 1, \text{αν } k = j \\ 0, \text{αλλιώς} \end{cases}$$
άρα το $\{U_0, U_1, \cdots, U_s\}$ είναι βάση του V^s_r

3. Αν $r \leq s$, ισχύει
$$F_j(D_k) = \begin{cases} 1, \text{αν } k = j \\ 0, \text{αλλιώς} \end{cases}$$
άρα το $\{D_0, D_1, \cdots, D_r\}$ είναι βάση του V^s_r

4. Αν $r \geq s$ κάθε $b_{1,2}(G) \in V^s_r$ γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός των $U_0, U_1, \cdots, U_s$
Αν $r \leq s$ κάθε $b_{1,2}(G) \in V^s_r$ γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός των $D_0, D_1, \cdots, D_r$

Απόδειξη

1. Για $k = 0, 1, \cdots, \min\{r, s\}$ έστω M_k το (μοναδικό ως προς ισομορφισμό) ταίριασμα με r κορυφές κάτω, s κορυφές πάνω και k ακμές. Θα δείξουμε ότι τα $b_{1,2}(M_k), k = 0, 1, \cdots, \min\{r, s\}$ είναι βάση του V^s_r. Έστω $b_{1,2}(G) \in V^s_r$. Αν το G δεν είναι ταίριασμα θα υπάρχουν ακμές e_1, e_2 του G με κοινή κορυφή. Τότε
$$b_{1,2}(G) \sim_M b_{1,2}(G_1) + b_{1,2}(G_2) - b_{1,2}(G_{12})$$
Με επαγωγή στο πλήθος των ακμών του G δείχνουμε ότι υπάρχουν $c_k \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε
$$b_{1,2}(G) \sim_M \sum_{k=0}^{\min\{r,s\}} c_k b_{1,2}(M_k)$$
Άρα τα $b_{1,2}(M_k)$ παράγουν τον V^s_r.
Επίσης είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, έστω
$$a_0 b_{1,2}(M_0) + \cdots + a_{\min\{r,s\}} b_{1,2}(M_{\min\{r,s\}}) = 0 \tag{3.11}$$
Έχουμε $F_j(b_{1,2}(M_k)) = 0$ αν $j > k$ και $F_j(b_{1,2}(M_j)) > 0$, άρα εφαρμόζοντας την $F_{\min\{r,s\}}$ στην (3.11) παίρνουμε $a_{\min\{r,s\}} F_{\min\{r,s\}}(b_{1,2}(M_{\min\{r,s\}})) = 0$, επομένως $a_{\min\{r,s\}} = 0$. Συνεχίζοντας όμοια δείχνουμε ότι $a_0 = a_1 = \cdots = a_{\min\{r,s\}} = 0$.
Άρα $\dim_{\mathbb{Q}} V^s_r = \min\{r, s\}$
Γνωρίζουμε ότι η διάσταση του χώρου των γραμμικών συναρτήσεων $V^s_r \to \mathbb{Q}$ ισούται με την $\dim_{\mathbb{Q}} V^s_r$, άρα είναι ίση με $\min\{r, s\}$.

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι οι $F_k, k = 0, 1, \cdots, \min\{r, s\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πράγματι, έστω

$$a_0 F_0 + \cdots + a_{\min\{r,s\}} F_{\min\{r,s\}} = 0 \tag{3.12}$$

Εφαρμόζωντας την (3.12) στο M_0 βρίσκουμε ότι $a_0 F_0(M_0) = 0$ άρα $a_0 = 0$. Συνεχίζοντας όμοια βρίσκουμε ότι $a_0 = a_1 = \cdots = a_{\min\{r,s\}} = 0$.

2. Έστω M ταίριασμα του πλήρους διμερούς γραφήματος, με s κορυφές. Το M περιέχει μια ακριβώς ακμή με άκρο την x, για κάθε άνω κορυφή x. Άρα έχει ακριβώς j κοινές ακμές με το U_j. Επομένως $F_j(U_j) = 1$ και $F_j(U_k) = 0$ για $k \neq j$.

3. Όμοια

4. Έστω $r \geq s$. Το $\{U_0, \cdots, U_s\}$ είναι βάση του V_r^s, άρα υπάρχουν $c_0, \cdots, c_s \in \mathbb{Q}$, τέτοια ώστε $b_{1,2}(G) = \sum_{k=0}^{s} c_k U_k$. Τότε $F_j(b_{1,2}(G)) = \sum_{k=0}^{s} c_k F_j(U_k) = c_j$ και τα $F_0(b_{1,2}(G)), \cdots, F_s(b_{1,2}(G))$ είναι πιθανότητες ενδεχομένων που διαμερίζουν τον δειγματικό χώρο.

□

Θεώρημα 3.4.4. Αν κάθε $(3 + 1)$ και $(2 + 2)$-ελεύθερο μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι e-θετικό, τότε και κάθε $(3 + 1)$-ελεύθερο μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι e-θετικό.
Απόδειξη
Έστω P ένα $(3 + 1)$-ελεύθερο μερικώς διατεταγμένο σύνολο και L μια αναπαράσταση του P. Κάθε μέρος της L της μορφής $b_{i,i+1}(G)$, οπού G δίχρωμο γράφημα, μπορεί να αντικατασταθεί με ένα κυρτό συνδυασμό udu ή dud διανυσμάτων χωρίς να επηρεαστεί η χρωματική συμμετρική συνάρτηση. Επίσης κάθε udu ή dud γράφημα μπορεί να αντικατασταθεί από μια λίστα μερών χωρίς δίχρωμα μέρη. Άρα η χρωματική συμμετρική συνάρτηση του P γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός χρωματικών συμμετρικών συναρτήσεων για μερικώς διατεταγμένα σύνολα που είναι $(3 + 1)$ και $(2 + 2)$-ελεύθερα.

□

Σαν αποτέλεσμα έχουμε μια εναλλακτική απόδειξη της e-θετικότητας των 3-ελεύθερων μερικώς διατεταγμένων συνόλων και επιπλέον έναν αναδρομικό τρόπο υπολογισμού της χρωματικής συμμετρικής συνάρτησής τους.

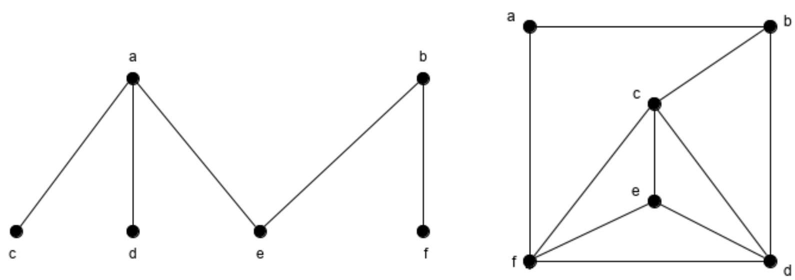
Θεώρημα 3.4.5. Κάθε 3-ελεύθερο μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι e-θετικό.
Απόδειξη
Έστω P 3-ελεύθερο μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Τότε υπάρχει αναπαράσταση του P της μορφής $b_{1,2}(G)$, για κάποιο δίχρωμο γράφημα G, με r κορυφές στο επίπεδο 1 και s κορύφες στο επίπεδο 2. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $r \geq s$ (αν χρειαστεί παίρνουμε το P^*, αφού $\mathrm{inc}(P) = \mathrm{inc}(P^*)$). Τότε υπάρχουν θετικοί ρητοί $c_0, c_1, \cdots, c_s$ που αθροίζουν στο 1, τέτοιοι ώστε:

$$b_{1,2}(G) \sim_M \sum_{k=0}^{s} c_k U_k$$

Έστω $k = 0, 1, \cdots, s-1$. Τότε $U_k = \overline{u_2^{s-k} u_1^r u_2^k} \sim_P \overline{u_1^r u_2^k u_1^{s-k}} \in V_{r+s-k}^k$(σχέση κυκλοφορίας), άρα γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός των $U_0, U_1, \cdots \in V_{r+s-k}^k$
Επαναλαμβάνοντας αυτήν την διαδικασία καταλήγουμε ότι το $b_{1,2}(G)$ είναι κυρτός συνδυασμός των $\overline{u_1^{r+k} u_2^{s-k}}, k = 0, 1, \cdots, s$. Το γράφημα που προκύπτει από τη λέξη $\overline{u_1^{r+k} u_2^{s-k}}$ είναι η ξένη ένωση των κλικών K_{r+k} και K_{s-k}, επομένως $X_{\overline{u_1^{r+k} u_2^{s-k}}} = (r+k)!(s-k)! e_{(r+k,s-k)}$. Υπάρχουν δηλαδή μη αρνητικοί ρητοί $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_s$ που αθροίζουν στην μονάδα, ώστε

$$X_{\mathrm{inc}(P)} = \sum_{k=0}^{s-1} \rho_k (r+k)!(s-k)! e_{(r+k,s-k)} + \rho_s (r+s)! e_{(r+s)}$$

$\square$



Σχήμα 3.5: P και $\mathrm{inc}(P)$

Για το μερικώς διατεταγμένο σύνολο P του σχήματος, που προκύπτει από τη λέξη $b_{1,2}(G)$, και το αντίστοιχο γράφημα $\mathrm{inc}(P)$ υπολογίζουμε:

$$F_k(b_{1,2}(G)) = \begin{cases} \frac{2}{12}, k = 0 \\ \\ \frac{5}{12}, k = 1 \\ \\ \frac{5}{12}, k = 2 \end{cases} \quad \text{άρα } b_{1,2}(G) \sim_M \frac{2}{12}\overline{u_2^2 u_1^4} + \frac{5}{12}\overline{u_2 u_1^4 u_2} + \frac{5}{12}\overline{u_1^4 u_2^2}$$

Επιπλέον $\overline{u_2^2 u_1^4} \sim_P \overline{u_1^6}$ και $\overline{u_2 u_1^4 u_2} \sim_P \overline{u_1^4 u_2 u_1}$.

$$\text{Βρίσκουμε ότι } F_k(\overline{u_1^4 u_2 u_1}) = \begin{cases} \frac{1}{5}, k = 0 \\ \\ \frac{4}{5}, k = 1 \end{cases} \quad \text{άρα } \overline{u_1^4 u_2 u_1} \sim_{\mathrm{M}} \frac{1}{5}\overline{u_2 u_1^5} + \frac{4}{5}\overline{u_1^5 u_2}$$

Επίσης ισχύει $\overline{u_2 u_1^5} \simeq_P u_1^6$. Υπολογίζουμε τώρα την χρωματική συμμετρική συνάρτηση $X_{\mathrm{inc}(P)}$

$$X_{\mathrm{inc}(P)} = \frac{2}{12} X_{\overline{u_1^6}} + \frac{5}{12}\left(\frac{1}{5} X_{\overline{u_1^6}} + \frac{4}{5} X_{\overline{u_1^5 u_2}}\right) + \frac{5}{12} X_{\overline{u_1^4 u_2^2}} = \frac{3}{12} X_{\overline{u_1^6}} + \frac{4}{12} X_{\overline{u_1^5 u_2}} + \frac{5}{12} X_{\overline{u_1^4 u_2^2}}$$

$$X_{\mathrm{inc}(P)} = \frac{3}{12} 6! e_{(6)} + \frac{4}{12} 5!1! e_{(5,1)} + \frac{5}{12} 4!2! e_{(4,2)} = 180 e_{(6)} + 40 e_{(5,1)} + 20 e_{(4,2)}$$

Επομένως, λόγω του πορίσματος (3.2.9), το $\mathrm{inc}(P)$ έχει 180 άκυκλους προσανατολισμούς με 1 βύθισμα, 40 άκυκλους προσανατολισμούς με ακολουθία βυθισμάτων $(2, 1, \cdots)$ και 20 άκυκλους προσανατολισμούς με ακολουθία βυθισμάτων $(2, 2, 1, \cdots)$.

Κεφάλαιο 4

Χρωματικές Quasi-συμμετρικές Συναρτήσεις

4.1 Ορισμοί και Βασικές ιδιότητες

Το 2012 οι Shareshian και Wachs[23] όρισαν ένα quasi-συμμετρικό ανάλογο της χρωματικής συμμετρικής συνάρτησης του Stanley. Σκοπός τους ήταν η βαθύτερη μελέτη και κατανόηση των χρωματικών συμμετρικών συναρτήσεων και ιδιαίτερα της εικασίας των Stanley και Stembridge. Για να ορίσουν την χρωματική quasi-συμμετρική συνάρτηση ενός γραφήματος εισήγαγαν επιγραφές για τις κορυφες του και μια μεταβλητή t.

Ορισμός 4.1.1. Έστω γράφημα $G = (V, E)$ με $V(G) = V = [d]$ και γνήσιος χρωματισμός κ του G. Το ζεύγος $\{i, j\} \in E(G)$ ονομάζεται G-άνοδος του κ αν $i < j$ και $\kappa(i) < \kappa(j)$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Asc}_G(\kappa)$ το σύνολο των G-ανόδων του κ και με $\mathrm{asc}_G(\kappa)$ το πλήθος τους. Η χρωματική quasi-χρωματική συνάρτηση του G ορίζεται ως

$$X_G(x,t) = \sum_{\kappa \in K(G)} t^{\mathrm{asc}_G(\kappa)} x^{\kappa}$$

Παρατήρηση 4.1.2.

- $$X_G(x,t) = \sum_{a \vDash d} \#\{\kappa \in K_a(G) : \mathrm{asc}_G(\kappa) = j\} M_a(x) t^j$$

  άρα το $X_G(x,t)$ είναι πολυώνυμο στο t με συντελεστές στον δακτύλιο $\mathrm{QSYM}_{\mathbb{Q}}$ των quasi-συμμετρικών συναρτήσεων, δηλαδή $X_G(x,t) \in \mathrm{QSYM}_{\mathbb{Q}}[t]$. Εναλλακτικά μπορούμε να δούμε το $X_G(x,t)$ σαν στοιχείο του δακτυλίου $\mathrm{QSYM}_{\mathbb{Q}[t]}$ των quasi-συμμετρικών συναρτήσεων με συντελεστές στο $\mathbb{Q}[t]$.

- Αν θέσουμε $t = 1$ παίρνουμε την χρωματική συμμετρική συνάρτηση $X_G(x)$.

- $X_{G+H}(x,t) = X_G(x,t) X_H(x,t)$, όπου το $G + H$ είναι η ξένη ένωση των γραφημάτων G, H.

Παράδειγμα 4.1.3.

1. Έστω G το μονοπάτι $1-2-3$.
   Τότε $X_G(x,t) = (1+4t+t^2)\mathrm{M}_{(1,1,1)} + t\mathrm{M}_{(2,1)} + t\mathrm{M}_{(1,2)} = (1+4t+t^2)m_{(1,1,1)} + tm_{(2,1)} =$
   $= m_{(1,1,1)} + (4m_{(1,1,1)} + m_{(2,1)})t + m_{(1,1,1)}t^2$

2. Έστω G το μονοπάτι $1-3-2$.
   Τότε $X_G(x,t) = (2+2t+2t^2)\mathrm{M}_{(1,1,1)} + t^2\mathrm{M}_{(2,1)} + \mathrm{M}_{(1,2)} =$
   $= (2M_{(1,1,1)} + M_{(1,2)}) + 2M_{(1,1,1)}t + (2M_{(1,1,1)} + M_{(2,1)})t^2$

Το προηγούμενο παράδειγμα δείχνει πως η χρωματική quasi-συμμετρική συνάρτηση ενός γραφήματος δεν εξαρτάται μόνο από την κλάση ισομορφισμού του γραφήματος αλλά και από τις επιγραφές που θα επιλέξουμε για τις κορυφές του. Επίσης βλέπουμε ότι στην πρώτη περίπτωση η $X_G(x,t)$ είναι συμμετρική συνάρτηση και στην δεύτερη όχι. Θα δούμε στην συνέχεια ότι αν περιοριστούμε στο σύνολο των φυσικών unit interval γραφημάτων, η χρωματική quasi-συμμετρική συνάρτηση είναι και συμμετρική και μάλιστα είναι παλινδρομικό πολυώνυμο στο t με κέντρο συμμετρίας $\dfrac{\#E}{2}$.
Θα υπολογίσουμε πρώτα έναν τύπο για την quasi-συμμετρική συνάρτηση $\rho X_G(x,t)$.
Για γνήσιο χρωματισμό κ του G το ζεύγος $\{i,j\} \in E(G)$ ονομάζεται G-κάθοδος του κ αν $i<j$ και $\kappa(i) > \kappa(j)$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Des}_G(\kappa)$ το σύνολο των G-καθόδων του κ και με $\mathrm{des}_G(\kappa)$ το πλήθος τους.

Πρόταση 4.1.4.

$$\rho X_G(x,t) = \sum_{\kappa \in K(G)} t^{\mathrm{des}_G(\kappa)} x^\kappa$$

Απόδειξη
Έστω $a = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ σύνθεση του d. Ορίζουμε απεικόνιση $\gamma : K_a(G) \to K_{a^{\mathrm{rev}}}(G)$.
Έστω γνήσιος χρωματισμός κ του G τύπου a. Ορίζουμε χρωματισμό κ' του G με $\kappa'(x) = m+1-\kappa(x)$ και θέτουμε $\gamma(\kappa) = \kappa'$. Τότε:

- Ο κ' είναι γνήσιος χρωματισμός του G τύπου a^{rev}
- $\mathrm{Asc}_G(\kappa) = E \setminus \mathrm{Asc}_G(\kappa') = \mathrm{Des}_G(\kappa')$
- $\gamma(\kappa') = \kappa$

Άρα

$$[M_a(x)t^j]X_G(x,t) = \#\{\kappa \in K_a(G) : \mathrm{asc}_G(\kappa) = j\} =$$

$$= \#\{\kappa \in K_{a^{rev}}(G) : \mathrm{asc}_G(\kappa) = \#E - j\} =$$

$$= [M_{a^{\mathrm{rev}}}(x)t^{\#E-j}]X_G(x,t) = [M_a(x)t^{\#E-j}]\rho(X_G(x,t))$$

$$\rho(X_G(x,t)) = \sum_{\kappa \in K(G)} t^{\#E-\mathrm{asc}_G(\kappa)} x^\kappa = \sum_{\kappa \in K(G)} t^{\mathrm{des}_G(\kappa)} x^\kappa$$

□

Πόρισμα 4.1.5. Αν $X_G(x,t) \in \Lambda_{\mathbb{Q}}[t]$, τότε

$$X_G(x,t) = \sum_{\kappa \in K(G)} t^{\mathrm{des}_G(\kappa)} x^{\kappa}$$

το οποίο είναι παλινδρομικό πολυώνυμο στο t με κέντρο συμμετρίας $\dfrac{\#E}{2}$.

Απόδειξη

Αφού $X_G(x,t) \in \Lambda_{\mathbb{Q}}[t]$ έχουμε $X_G(x,t) = \rho(X_G(X,t)) = \displaystyle\sum_{\kappa \in K(G)} t^{\mathrm{des}_G(\kappa)} x^{\kappa}$.

Έστω $X_G(x,t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{q} r_i(x) t^i$, όπου $q = \#E$.

Θα δείξουμε ότι $r_i(x) = r_{q-i}(x)$ για $i = 0, 1, \cdots, q$.

Πράγματι $r_i(x) = \displaystyle\sum_{\kappa : \mathrm{des}_G(\kappa) = i} x^{\kappa} = \sum_{\kappa : \mathrm{asc}_G(\kappa) = q-i} x^{\kappa} = r_{q-i}(x)$.

□

Θεώρημα 4.1.6. Αν P φυσική unit interval διάταξη τότε οι συντελεστές των δυνάμεων του t στο $X_{\mathrm{inc}(P)}(x,t)$ σχηματίζουν μια συμμετρική και παλινδρομική ακολουθία.

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε τα εξής:

Παρατήρηση 4.1.7.

- Έστω γράφημα G. Για $x \in V(G)$ έστω $[x]_G$ η συνεκτική συνιστώσα του G στην οποία ανήκει το x. Θέτουμε
  $O_G = \{x \in V : \#[x]_G \text{ περιττός}\}$ και $E_G = \{x \in V : \#[x]_G \text{ άρτιος}\}$ και G_O και G_E τα αντίστοιχα επαγόμενα υπογραφήματα. Τότε το G είναι ξένη ένωση των γραφημάτων G_O και G_E.

- Έστω G διμερές γράφημα στα σύνολα κορυφών A, B. Θεωρούμε τα σύνολα $O_A(G) = A \cap O_G$, $E_A(G) = A \cap E_G$ και όμοια τα $O_B(G)$ και $E_B(G)$. Τότε το G_O είναι διμερές γράφημα στα $O_A(G), O_B(G)$, και το G_E είναι διμερές γράφημα στα $E_A(G), E_B(G)$. Αν επιπλέον κάθε κορυφή του G έχει βαθμό το πολύ 2, οι συνεκτικές συνιστώσες του είναι κύκλοι και μονοπάτια που εναλλάσσουν κορυφές ανάμεσα στα σύνολα A και B. Άρα κάθε συνεκτική συνιστώσα του G_O είναι μονοπάτι με περιττό πλήθος κορυφών που εναλάσσει κορυφές ανάμεσα στα $O_A(G)$ και $O_B(G)$. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του G_E είναι μονοπάτι ή κύκλος με άρτιο πλήθος κορυφών που εναλάσσει κορυφές ανάμεσα στα $E_A(G)$ και $E_B(G)$ επομένως $\#E_A(G) = \#E_B(G)$.

Λήμμα 4.1.8. Έστω $G = \mathrm{inc}(P)$ όπου P φυσική unit interval διάταξη και A, B ανεξάρτητα υποσύνολα του $V(G)$. Έστω $H = G_{A \cup B}$ το επαγόμενο υπογράφημα του G στο σύνολο κορυφών $A \cup B$.

- Το H είναι διμερές γράφημα στα A και B και κάθε κορυφή του έχει βαθμό το πολύ 2

- $\#E_A(H) = \#E_B(H)$

- Κάθε συνεκτική συνιστώσα του H είναι μονοπάτι της μορφής $x_1 - x_2 - \cdots - x_m$ που οι κορυφές του εναλλάσσονται ανάμεσα στα A και B και $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$

- $\#\{\{x,y\} \in E : x \in O_A(H), y \in O_B(H) \text{ και } x < y\} =$
$\#\{\{x,y\} \in E : x \in O_A(H), y \in O_B(H) \text{ και } x > y\}$

Απόδειξη

- Το $G_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}$ είναι διμερές γράφημα στα σύνολα κορυφών A και B.

- Έστω $x - y - z$ μονοπάτι του $G_{A\cup B}$. Το $G_{A\cup B}$ είναι διμερές, άρα δεν περιέχει κύκλο μήκους 3. Επομένως $\{x,z\} \notin P$, άρα τα x, z είναι P-συγκρίσιμα. Το y δεν είναι P-συγκρίσιμο με τα x, z, γιατί $\{x,y\}, \{y,z\} \in E(G)$.
Αν $x <_P z$ έπεται $x < y < z$, ενώ αν $x >_P z$ έπεται $x > y > z$, επειδή το P είναι φυσική unit interval διάταξη.

- Κάθε κορυφή του $G_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}$ έχει βαθμό το πολύ 2. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $x, y, z, w \in A \cup B$, με $\{x,y\}, \{x,z\}, \{x,w\} \in E(G_{A\cup B})$. Τότε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \in A$ και $y, z, w \in \mathrm{B}$. Άρα το επαγόμενο υπογράφημα του G στο $\{x, y, z, w\}$ είναι ισόμορφο με το $K_{3,1}$. Άτοπο γιατί το P είναι $(3+1)$-ελεύθερο.

- Οι συνεκτικές συνιστώσες του $G_{A\cup B}$ είναι μονοπάτια και κύκλοι που εναλλάσσουν κορυφές ανάμεσα στα σύνολα A και B.

- Έστω $x_1 - x_2 - \cdots - x_m$ μονοπάτι του $G_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}$. Τότε $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ ή $x_1 > x_2 > \cdots > x_m$.

$\square$

Απόδειξη θεωρήματος
$X_{\mathrm{inc}(P)}(x,t) = \sum_a q_a(t)x^a$, όπου $q_a(t) = [x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots]X_{\mathrm{inc}(P)}(x,t) = \sum_{\kappa\in K_a(G)} t^{\mathrm{asc}_G(\kappa)}$ για a ασθενή σύνθεση του d.
Έστω $a = (a_1, a_2, \cdots)$ ασθενής σύνθεση του d. Θα δείξουμε ότι για κάθε $w \in \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{>0}}$ ισχύει $q_a(t) = q_{w(a)}(t)$, όπου $w(a) = (a_{w_1^{-1}}, a_{w_2^{-1}}, \cdots)$. Αρκεί να το δείξουμε για τις μεταθέσεις της μορφής $w = (r\, r+1)$.
Έστω $r \in \mathbb{N}$, $w = (r\, r+1)$. Τότε $w(a) = (a_1, \cdots, a_{r+1}, a_r, \cdots)$. Θα βρούμε 1-1 αντιστοιχία $\psi_a : K_a(G) \to K_{w(a)}(G)$ που να διατηρεί το πλήθος των G-ανόδων.
Έστω $\kappa \in K_a(G)$, δηλαδή κ γνήσιος χρωματισμός του G με a_i κορυφές χρωματισμένες με i για κάθε i. Θέτουμε $\mathrm{A} = \{x \in V : \kappa(x) = r\}$ και $\mathrm{B} = \{x \in V : \kappa(x) = r+1\}$. Τότε $\#A = a_r$ και $\#B = a_{r+1}$. Έστω H το επαγόμενο υπογράφημα του G στα σύνολα κορυφών A, B. Τα A, B είναι ανεξάρτητα, άρα από το λήμμα (4.1.8) έπεται ότι $\#E_A(H) = \#E_B(H)$ και
$\#\{\{x,y\} \in E : x \in O_A(H), y \in O_B(H) \text{ και } x < y\} =$
$= \#\{\{x,y\} \in E : x \in O_A(H), y \in O_B(H) \text{ και } x > y\}$

Ορίζουμε χρωματισμό κ' του G ως εξής:

$$\kappa'(x) = \begin{cases} r, \text{αν } x \in E_A(H) \cup O_B(H) \\ r+1, \text{αν } x \in E_B(H) \cup O_A(H) \\ \kappa(x), \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Θέτουμε $\psi_a(\kappa) = \kappa'$ Τότε:

- Ο κ' είναι γνήσιος
  Τα $E_A(H) \cup O_B(H), E_B(H) \cup O_A(H)$ είναι ευσταθή.

- $\kappa' \in K_{w(a)}(G)$
  $\#\{x \in V : \kappa'(x) = r\} = \#E_A(H) + \#O_B(H) = \#E_B(H) + \#O_B(H) = \#B = a_{r+1}$
  και
  $\#\{x \in V : \kappa'(x) = r+1\} = \#E_B(H) + \#O_A(H) = \#E_A(H) + \#O_A(H) = \#A = a_r$

- $\mathrm{asc}_G(\kappa) = \mathrm{asc}_G(\kappa')$
  Αρκεί να μετρήσουμε τις G-ανόδους της μορφής $\{x, y\} \in E(G)$ με $x \in O_B(H)$ και $y \in O_A(H)$, για τους χρωματισμούς κ και κ'.

□

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε το ανάπτυγμα των quasi-συμμετρικών συναρτήσεων στις διάφορες βάσεις και θα περιγράψουμε την εκλέπτυνση της εικασίας Stanley-Stembridge που διατύπωσαν οι Shareshian και Wachs.

4.2 Ανάπτυγμα στη Βάση των Θεμελιώδών quasi-συμμετρικών Συναρτήσεων

Θα δούμε τώρα πως γράφεται η χρωματική quasi-συμμετρική συνάρτηση του γραφήματος $\mathrm{inc}(P)$, ενός τυχαίου μερικώς διατεταγμένου συνόλου P, σαν γραμμικός συνδυασμός των θεμελιωδών quasi-συμμετρικών συναρτήσεων. Για το σκοπό αυτό θα δώσουμε δύο ορισμούς, που επεκτείνουν τις έννοιες της αντιστροφής και της καθόδου μιας μετάθεσης.
Έστω P μερικώς διατεταγμένο σύνολο στο $[d]$, $G = ([d], E)$ γράφημα και $w \in \mathfrak{S}_d$.

Ορισμός 4.2.1.

1. Το $i \in [d]$ λέγεται P-κάθοδος της w, αν $w_i >_P w_{i+1}$

2. Το ζεύγος $\{w_i, w_j\} \in E(G)$ λέγεται G-αντιστροφή της w, αν $i < j$ και $w_i > w_j$

Συμβολίζουμε με $\mathrm{Des}_P(w)$ το σύνολο των P-καθόδων της w, με $\mathrm{Inv}_G(w)$ το σύνολο των G-αντιστροφών της w, και με $\mathrm{des}_P(w)$, $\mathrm{inv}_G(w)$ τους αντίστοιχους πληθαρίθμους τους.
Παρατηρούμε ότι αν P είναι η αλυσίδα $1 <_P 2 <_P \cdots <_P d$, οι P-κάθοδοι είναι οι συνήθεις κάθοδοι, ενώ αν $G = K_d$ οι G-αντιστροφές είναι οι συνήθεις αντιστροφές.

Θεώρημα 4.2.2. Έστω P μερικώς διατεταγμένο σύνολο στο $[d]$ και $G = \mathrm{inc}(P)$. Τότε

$$\omega X_G(x,t) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} t^{\mathrm{inv}_G(w)} F_{d,d-\mathrm{Des}_P(w)}(x)$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 4.2.3. Αν o άκυκλος προσανατολισμός του G, υπάρχει επιγραφή ω_o του $\tilde{o}$ τέτοια ώστε

$$i <_{\tilde{o}} j \Rightarrow \omega_o(i) > \omega_o(j) \tag{4.1}$$

$$i \parallel_{\tilde{o}} j \text{ και } i <_P j \Rightarrow \omega_o(i) > \omega_o(j) \tag{4.2}$$

Απόδειξη
Κατασκευάζουμε την επιγραφή ω_o επαγωγικά, ως εξής:

1. Έστω $B_1 = [d]$ και A_1 το σύνολο των $\tilde{o}$-μεγιστικών στοιχείων του. Αν $x, y \in A_1$ τότε $x \parallel_{\tilde{o}} y$ άρα δεν συνδέονται με ακμή στο G. Επομένως το A_1 είναι αλυσίδα του P. Έστω a_1 το μέγιστο στοιχείο του A_1, με την μερική διάταξη $\leq_P$. Θέτουμε $\omega_o(a_1) = 1$.

2. Έστω $k = 1, 2, \cdots, d-1$ και ότι έχει οριστεί η ω_o για k στοιχεία $a_1, a_2, \cdots, a_k$ του $[d]$. Θέτουμε $B_{k+1} = [d] \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ και A_{k+1} το σύνολο των $\tilde{o}$-μεγιστικών στοιχείων του. Όπως πριν υπάρχει το $P-$μέγιστο στοιχείο του A_{k+1}, έστω a_{k+1} και θέτουμε $\omega_o(a_{k+1}) = k+1$.

Η ω_o είναι καλά ορισμένη επιγραφή του $\tilde{o}$ και ισχύουν:

1. Έστω $i <_{\tilde{o}} j$.
   Αν $i = a_k, j = a_l$, έπεται ότι το i είναι $\tilde{o}-$μεγιστικό στοιχείο του B_k. Άρα, αφού $i <_{\tilde{o}} j$, έπεται ότι $j \notin B_k$. Επομένως $l < k$, δηλαδή $\omega_o(i) > \omega_o(j)$.

2. Έστω $i \parallel_{\tilde{o}} j$ και $i <_P j$.
   Αν $i = a_k, j = a_l$ έπεται ότι το i είναι το $P-$μέγιστο στοιχείο του A_k. Αφού $i <_P j$, έπεται ότι $j \notin A_k$. Ας υποθέσουμε ότι $\omega_o(i) < \omega_o(j)$, δηλαδή $k < l$. Τότε $j \in B_k$ και δεν είναι $\tilde{o}-$μεγιστικό στοιχείο του, άρα υπάρχει $\tilde{o}-$μεγιστικό στοιχείο z του B_k, με $z >_{\tilde{o}} j$. Τότε $z \in A_k$ και $z \neq i$ άρα $z <_P i$ και $\omega_o(z) > k$. Επιλέγουμε z_0 ένα $\tilde{o}-$ελαχιστικό στοιχείο του συνόλου $\{z \in [d] : z <_P i, z >_{\tilde{o}} j \text{ και } \omega_o(z) > k\}$.
   Έστω $t \in [d]$ με $j \leq_{\tilde{o}} t <_{\tilde{o}} z_0$ και $t <_{\tilde{o}} z_0$ σχέση κάλυψης. Έχουμε:

   - $\omega_o(i) < \omega_o(z_0) < \omega_o(t)$, άρα $i \not<_{\tilde{o}} t$.
   - $i \parallel_{\tilde{o}} j$ και $t >_{\tilde{o}} j$ άρα $t \not<_{\tilde{o}} i$.
   - Αν $j = t$ έπεται από υπόθεση ότι $t \not<_P i$. Αν $j <_{\tilde{o}} t$ έπεται ότι $t \not<_P i$ λόγω της ελαχιστικότητας του z_0.
   - Τα i, t είναι μη $\tilde{o}$-συγκρίσιμα άρα δεν υπάρχει ακμή στο G που να τα συνδέει. Επομένως i, t P-συγκρίσιμα και αφού $t \not<_P i$ έπεται ότι $i \leq_P t$.
   - $z_0 <_P i \leq_P t$, δηλαδή τα z_0 και t είναι P-συγκρίσιμα.
   - Το $t <_{\tilde{o}} z_0$ είναι σχέση κάλυψης άρα $\{z_0, t\} \in E(G)$.

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα $\omega_o(i) > \omega_o(j)$.

$\square$

Απόδειξη θεωρήματος

1. Έστω άκυκλος προσανατολισμός o του G.
Ονομάζουμε G-άνοδο του o ένα ζεύγος $\{i,j\} \in E(G)$ τέτοιο ώστε $i < j$ και $j \to i$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Asc}_G(o)$ το σύνολο των G-ανόδων του o και με $\mathrm{asc}_G(o)$ το πλήθος τους. Έστω τώρα κ γνήσιος χρωματισμός του G που συμφωνεί με τον o. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{Asc}_G(o) = \mathrm{Asc}_G(\kappa)$. Άρα
$$X_G(x,t) = \sum_{o \in AO(G)} \sum_{\kappa\ o\text{-σύμφωνος}} t^{\mathrm{asc}_G(\kappa)} x^\kappa = \sum_{o \in AO(G)} t^{\mathrm{asc}_G(o)} \sum_{\kappa\ o\text{-σύμφωνος}} x^\kappa = \sum_o t^{\mathrm{asc}_G(o)} K_{\tilde{o}}$$

2. $K_{\tilde{o}} = \sum_{w \in L(\tilde{o},\omega_o)} F_{d,\mathrm{Des}(w)}$, όπου ω_o επιγραφή όπως στο λήμμα. Επομένως
$$X_G(x,t) = \sum_o t^{\mathrm{asc}_G(o)} \sum_{w \in L(\tilde{o},\omega_o)} F_{d,\mathrm{Des}(w)} \tag{4.3}$$

3. Παρατηρούμε ότι αν $e : [d] \to [d]$ είναι η ταυτοτική επιγραφή του $\tilde{o}$, τότε για μια $w \in \mathfrak{S}_d$ ισχύει $w \in L(\tilde{o},\omega_o)$ ανν υπάρχει $a \in L(\tilde{o},e)$ ώστε $w = \omega_o \circ a$.
Άρα $X_G(x,t) = \sum_o t^{\mathrm{asc}_G(o)} \sum_{a \in L(\tilde{o},e)} F_{d,\mathrm{Des}(\omega_o \circ a)}$.
Για μια $a \in \mathfrak{S}_d$ υπάρχει μοναδικός άκυκλος προσανατολισμός $o(a)$ του G ώστε $w \in L(o(a),e)$. Ορίζουμε τον $o(a)$ ως εξής: αν $\{i,j\} \in E(G)$ και το i εμφανίζεται πριν από το j στην a θεωρούμε τον προσανατολισμό $j \to i$. Άρα η σχέση (4.3) γίνεται
$$X_G(x,t) = \sum_{a \in \mathfrak{S}_d} t^{\mathrm{asc}_G(o(a))} F_{d,\mathrm{Des}(\omega_{o(a)} \circ a)}$$

4. $\mathrm{Asc}_G(o(a)) = \mathrm{Inv}_G(a^{\mathrm{rev}})$
Έστω $1 \le i < j \le d$. Ισχύει $\{i,j\} \in \mathrm{Asc}_G(o(a))$ ανν $\{i,j\} \in E(G)$ και $j \to i$ ανν $\{i,j\} \in E(G)$ και το i εμφανίζεται αριστερά του j στην a ανν $\{i,j\} \in E(G)$ και το i εμφανίζεται δεξιά του j στην a^{rev} ανν $\{i,j\} \in \mathrm{Inv}_G(a^{\mathrm{rev}})$. Άρα
$$X_G(x,t) = \sum_{a \in \mathfrak{S}_d} t^{\mathrm{inv}_G(a^{\mathrm{rev}})} F_{d,\mathrm{Des}(\omega_{o(a)} \circ a)}$$

5. $[d-1] \setminus \mathrm{Des}(\omega_{o(a)} \circ a) = \mathrm{Des}_P(a)$.
   - Έστω $i \in \mathrm{Des}_P(a)$.
   Τότε $a_i >_P a_{i+1}$ άρα τα a_i, a_{i+1} δεν συνδέονται με ακμή στο G. Αφού $a \in L(o(a),e)$ και το a_{i+1} δεν καλύπτει το a_i έχουμε $a_i \parallel_{\widetilde{o(a)}} a_{i+1}$. Από την ιδιότητα (4.2) για την επιγραφή $\omega_{o(a)}$ έπεται ότι $\omega_{o(a)}(a_i) < \omega_{o(a)}(a_{i+1})$, επομένως το i δεν είναι κάθοδος της $\omega_{o(w)} \circ a$.

- Έστω τώρα $i \in [d-1] \setminus \mathrm{Des}(\omega_{o(a)} \circ a)$.
  Τότε $\omega_{o(a)}(a_i) < \omega_{o(a)}(a_{i+1})$. Από την ιδιότητα (4.1) για την επιγραφή $\omega_{o(a)}$ έπεται ότι $a_i \not<_{\widetilde{o(a)}} a_{i+1}$. Αφού $o \in L(o(a), e)$ έχουμε $a_i \parallel_{\widetilde{o(a)}} a_{i+1}$. Επομένως δεν συνδέονται με ακμή στο G, άρα είναι P-συγκρίσιμα. Έστω $a_i <_P a_{i+1}$. Τότε από την ιδιότητα (4.2) για την επιγραφή $\omega_{o(a)}$ έπεται ότι $\omega_{o(a)}(a_i) > \omega_{o(a)}(a_{i+1})$. Άτοπο, άρα $a_i >_P a_{i+1}$, επομένως το i είναι P-κάθοδος της a.

$$X_G(x,t) = \sum_{a \in \mathfrak{S}_d} t^{\mathrm{inv}_G(a^{\mathrm{rev}})} F_{d,[d-1]\setminus \mathrm{Des}_P(a)} = \sum_{a \in \mathfrak{S}_d} t^{\mathrm{inv}_G(a)} F_{d,[d-1]\setminus \mathrm{Des}_P(a^{\mathrm{rev}})}$$

$$\omega X_G(x,t) = \sum_{a \in \mathfrak{S}_d} t^{\mathrm{inv}_G(a)} F_{d,\mathrm{Des}_P(a^{\mathrm{rev}})}$$

6. $\mathrm{Des}_P(a^{\mathrm{rev}}) = d - \mathrm{Des}_{P^*}(a)$
   Έστω $i \in [d]$. Τότε $i \in \mathrm{Des}_P(a^{\mathrm{rev}})$ ανν $a_i^{\mathrm{rev}} >_P a_{i+1}^{\mathrm{rev}}$ ανν $a_{d+1-i} >_P a_{d+1-(i+1)}$ ανν $a_{d-i} >_{P^*} a_{d-i+1}$ ανν $d-i \in \mathrm{Des}_{P^*}(a)$, άρα

$$\omega X_G(x,t) = \sum_{a \in \mathfrak{S}_d} t^{\mathrm{inv}_G(a)} F_{d,d-\mathrm{Des}_{P^*}(a)}$$

   και επειδή $\mathrm{inc}(P) = \mathrm{inc}(P^*)$ έπεται το ζητούμενο.

$\square$

Παράδειγμα 4.2.4. Έστω G το μονοπάτι $1-3-2$, δηλαδή $G = \mathrm{inc}(P)$ για το μερικώς διατεταγμένο σύνολο P στο $[3]$ με μοναδική σχέση $1 <_P 2$.

w	$\mathrm{inv}_G(w)$	$\mathrm{Des}_P(w)$
123	0	$\emptyset$
132	1	$\emptyset$
213	0	$\{1\}$
231	1	$\emptyset$
312	2	$\emptyset$
321	2	$\{2\}$

$\omega X_G(x,t) = (1+2t+t^2)F_{3,\emptyset} + F_{3,\{2\}} + t^2 F_{3,\{1\}} = (F_{(3)} + F_{(2,1)}) + (2F_{(3)})t + (F_{(3)} + F_{(1,2)})t^2$, δηλαδή η $\omega X_G(x,t)$ δεν είναι παλινδρομική.

Πόρισμα 4.2.5.

1. Αν $X_{\mathrm{inc}(P)}(x,t) \in \Lambda_{\mathbb{Q}}[t]$ τότε $\omega X_{\mathrm{inc}(P)}(x,t) = \displaystyle\sum_{w \in \mathfrak{S}_d} t^{\mathrm{inv}_G(w)} F_{d,\mathrm{Des}_P(w)}$

2. $\omega X_{\mathrm{inc}(P)}(x) = \displaystyle\sum_{w \in \mathfrak{S}_d} F_{d,\mathrm{Des}_P(w)}$

4.3 Η Εικασία Shareshian-Wachs

Για τα επόμενα το P θα είναι φυσική unit interval διάταξη στο $[d]$ και $G = \mathrm{inc}(P)$ και θα μελετήσουμε το ανάπτυγμα της $X_G(x,t)$ στις βάσεις της άλγεβρας των συμμετρικών συναρτήσεων.
Όπως και στην περίπτωση των χρωματικών συμμετρικών συναρτήσεων δεν έχουν υπολογιστεί τύποι για τους συντελεστές στην βάση των στοιχειωδών συμμετρικών συναρτήσεων, στην γενική περίπτωση των φυσικών unit interval γραφημάτων. Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε έναν συνδυαστικό τύπο για κάποια αθροίσματα αυτών των συντελεστών [23], αντίστοιχο με τον τύπο (3.2.3) [25].

Ορισμός 4.3.1. Αν o είναι άκυκλος προσανατολισμός του G, ένα ζεύγος $\{i,j\} \in E(G)$ ονομάζεται G-κάθοδος του o αν $i < j$ και $i \to j$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{des}_G(o)$ το πλήθος των G-καθόδων του o.

Θεώρημα 4.3.2. Έστω P φυσική unit interval διάταξη στο $[d]$ και $X_{\mathrm{inc}(P)} = \sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda(t) s_\lambda(x)$.
Τότε

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Par}(n,j)} c_\lambda(t) = \sum_{o \in \mathrm{Sink}(G,j)} t^{\mathrm{des}_G(o)}$$

Απόδειξη
Αφού το P είναι φυσική unit interval διάταξη, ισχύει $X_G(x,t) = \sum_{\kappa \in K(G)} t^{\mathrm{des}_G(\kappa)} x^\kappa$
άρα $X_G(x,t) = \sum_{o \in AO(G)} t^{\mathrm{des}(o)} K_{\tilde{o}}$. Από το λήμμα (3.2.4) έπεται το ζητούμενο.

□

Ειδικότερα

$$c_{(d)}(t) = \sum_o t^{\mathrm{des}_G(o)}$$

όπου το o διατρέχει τους άκυκλους προσανατολισμούς του G με ένα ακριβώς βύθισμα. Στην επόμενη ενότητα θα αποδείξουμε έναν κλειστό τύπο για αυτό τον συντελεστή.
Στην περίπτωση των γραφημάτων P_d έχουν βρεθεί κλειστοί τύποι για τους συντελεστές και έχει βρεθεί συνδυαστική ερμηνεία τους[8], αντίστοιχη με αυτή που περιγράφαμε στο (3.2.12). Θα δώσουμε μια απόδειξη για αυτούς τους τύπους στην επόμενη ενότητα, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα των χρωματικών quasi-συμμετρικών συναρτήσεων στην βάση των powersum συμμετρικών συναρτήσεων.

Πρόταση 4.3.3.

$$X_{P_d}(x,t) = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor} \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_m \geq 2, k_1+\cdots+k_m = d+1} [k_1-1]_t [k_2-1]_t \cdots [k_m-1]_t t^{m-1} e_{(k_1-1,k_2,\cdots,k_m)}$$

Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) = \langle 1^{r_1}, 2^{r_2}, \cdots \rangle$. Τότε:

$$c_\lambda(t) = \begin{cases} [d]_t, \text{ αν } m = 1 \\ t^{m-1} \displaystyle\sum_{a \in \mathfrak{S}(r_1, r_2, \cdots)} [a_1]_t [a_2 - 1]_t \cdots [a_m - 1]_t, \text{ αν } m = 2, \cdots, \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor \\ 0, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $\mathfrak{S}(r_1, r_2, \cdots)$ είναι το σύνολο των μεταθέσεων της συλλογής $\{1^{r_1}, 2^{r_2}, \cdots\}$ και

$$c_\lambda(t) = \sum_{o \in \text{Sink}(P_d, \lambda)} t^{\text{des}_G(o)}$$

Παράδειγμα 4.3.4.

o	$\text{Sink}(o)$	$\text{des}_G(o)$
$1 \to 2 \to 3$	$\{3\}$	2
$1 \leftarrow 2 \to 3$	$\{1, 3\}$	1
$1 \to 2 \leftarrow 3$	$\{2\}$	1
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$	$\{1\}$	0

άρα $X_{P_3}(x, t) = (1 + t + t^2)e_{(3)} + te_{(2,1)} = e_{(3)} + (e_{(3)} + e_{(2,1)})t + e_{(3)}t^2$

1. $X_{P_4}(x, t) = e_{(4)} + (e_{(4)} + e_{(3,1)} + e_{(2,2)})t + (e_{(4)} + e_{(3,1)} + e_{(2,2)})t^2 + e_{(4)}t^3$

2. $X_{P_5}(x, t) = e_{(5)} + (e_{(5)} + 2e_{(3,2)} + e_{(4,1)})t + (e_{(5)} + 3e_{(3,2)} + e_{(4,1)} + e_{(2,2,1)})t^2 + (e_{(5)} + 2e_{(3,2)} + e_{(4,1)})t^3 + e_{(5)}t^4$

3. $X_{P_6}(x, t) = e_{(6)} + (e_{(6)} + e_{(5,1)} + 2e_{(4,2)} + e_{(3,3)})t + (e_{(6)} + e_{(5,1)} + 3e_{(4,2)} + 2e_{(3,3)} + 2e_{(3,2,1)} + e_{(2,2,2)})t^2 + (e_{(6)} + e_{(5,1)} + 3e_{(4,2)} + 2e_{(3,3)} + 2e_{(3,2,1)} + e_{(2,2,2)})t^3 + (e_{(6)} + e_{(5,1)} + 2e_{(4,2)} + e_{(3,3)})t^4 + e_{(6)}t^5$

Όπως είδαμε οι συντελεστές των δυνάμεων του t στην $X_G(x, t)$ είναι συμμετρικές συναρτήσεις που σχηματίζουν παλινδρομική ακολουθία. Στο προηγούμενο παράδειγμα παρατηρούμε ότι επιπλέον κάθε συντελεστής είναι e-θετικός και μάλιστα πως ισχύει κάτι ισχυρότερο: αν αφαιρέσουμε έναν συντελεστή από τον επόμενο, για δυνάμεις του t μικρότερες του $\frac{q}{2}$, εξακολουθούμε να έχουμε e-θετικότητα.

Ορισμός 4.3.5. Έστω R μια $\mathbb{Q}$−άλγεβρα με βάση b και $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_q t^q \in R[t]$ παλινδρομικό πολυώνυμο. Το $f(t)$ λέγεται b-θετικό αν κάθε a_i είναι b-θετικό. Επιπλέον λέγεται b-μονότροπο αν το $a_{i+1} - a_i$ είναι b-θετικό για $i = 1, 2, \cdots, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$.

Οι Shareshian και Wachs διατύπωσαν την ακόλουθη εικασία, που είναι ισχυρότερη της εικασίας Stanley-Stembridge.

Εικασία 4.3.6. Έστω P φυσική unit interval διάταξη και $G = \text{inc}(P)$. Τότε οι συντελεστές των δυνάμεων του t στην $X_G(x, t)$ σχηματίζουν μια e-θετική και e-μονότροπη ακολουθία.

Όπως θα δούμε παρακάτω η ασθενέστερη συνθήκη της Schur-θετικότητας και μονοτροπίας έχουν αποδειχτεί, αλλά η εικασία Shareshian-Wachs παραμένει μέχρι και σήμερα ανοιχτή. Η e-θετικότητα και σε κάποιες περιπτώσεις και η e-μονοτροπία έχουν αποδειχτεί για αρκετές

κλάσεις φυσικών unit interval γραφημάτων, ενώ σε κάποιες περιπτώσεις έχουν βρεθεί και κλειστοί τύποι για τους αντίστοιχους συντελεστές. Παρακάτω συνοψίζουμε κάποια γνωστά αποτελέσματα.
Έστω $P = P(m_1, m_2, \cdots, m_{d-1})$.

- Στην περίπτωση που $P = P(2, 3, \cdots, d)$ προκύπτει το μονοπάτι P_d που όπως είδαμε είναι e-θετικό και e-μονότροπο.
- Στην περίπτωση που $m_3 = d$ οι Shareshian και Wachs απέδειξαν κλειστούς τύπους που δείχνουν την e-θετικότητα, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα στην βάση των συναρτήσεων Schur, όπως θα δούμε στην ενότητα 4.5.
- Στην περίπτωση που $m_1 = r < d$ και $m_{r+1} = d$ η e-θετικότητα αποδείχτηκε από τους Cho και Huh[6].
- Στην περίπτωση που $m_1 = r, m_s = d - 1$ και $m_{s+1} = d$ για κάποιο $r < s < d - 1$ η e-θετικότητα αποδείχτηκε από τους Cho και Huh[6].
- Στην περίπτωση που $m_1 = \cdots = m_s = r$ και $m_{s+1} = d$ με $s \leq r \leq d - 1$ η e-θετικότητα και e-μονοτροπία αποδείχτηκαν από τους Cho και Huh[6].

Στην ενότητα 3.2 είδαμε την e-θετικότητα της χρωματικής συμμετρικής συνάρτησης για μια οικογένεια γραφημάτων που δεν περιλαμβάνεται στα φυσικά unit interval γραφήματα, των κύκλων, υπολογίζοντας την γεννήτρια συνάρτηση. Ένα quasi-συμμετρικό ανάλογο του θεωρήματος (3.2.13) απέδειξαν οι Shareshian και Ellzey.

Θεώρημα 4.3.7.

$$\sum_{d\geq 2} X_{C_d}(x,t)z^d = \frac{\sum\limits_{i\geq 2}([2]_t[i]_t + it^2[i-3]_t)e_i(x)z^i}{1 - \sum\limits_{i\geq 2} t[i-1]_t e_i(x)z^i}$$

άρα το $X_{C_d}(x,t)$ είναι e-θετικό.

Ανεξάρτητα, οι Ellzey[8] και Panova–Alexandersson[2] έδωσαν έναν ορισμό για τη χρωματική quasi-συμμετρική συνάρτηση προσανατολισμένων γραφημάτων, ο οποίος συμφωνεί με τον ορισμό των Shareshian και Wachs στην περίπτωση των άκυκλων προσανατολισμένων γραφημάτων. Στην περίπτωση αυτή μας ενδιαφέρει ο προσανατολισμός κάθε ακμής και όχι οι επιγραφές των άκρων της. Έτσι αν θεωρήσουμε τον προσανατολισμένο κύκλο $\overrightarrow{C_d}$ προκύπτει ο απλούστερος τύπος

$$\sum_{d\geq 2} X_{\overrightarrow{C_d}}(x,t)z^d = \frac{t\sum\limits_{i\geq 2} i[i-1]_t e_i z^i}{1 - t\sum\limits_{i\geq 2}[i-1]_t e_i z^i}$$

που δίνει e-θετικότητα και e-μονοτροπία[9]. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται στην παρακάτω εικασία, που αναφέρεται σε ένα κυκλικό ανάλογο των φυσικών unit interval γραφημάτων.

Εικασία 4.3.8. Αν το $\overrightarrow{G}$ είναι φυσικό unit interval προσανατολισμένο γράφημα η $X_{\overrightarrow{G}}(x,t)$ είναι e-θετική και e-μονότροπη.

Για περισσότερες πληροφορίες πάντω στις quasi-συμμετρικές συναρτήσεις για προσανατολισμένα γραφήματα και στα φυσικά unit interval προσανατολισμένα γραφήματα παραπέμπουμε στο [8].

4.4 Ανάπτυγμα στη Βάση των Powersum Συμμετρικών Συναρτήσεων

Το παρακάτω θεώρημα, που δίνει το ανάπτυγμα στην βάση των powersum συμμετρικών συναρτήσεων διατυπώθηκε από τους Sharesian και Wachs[23] και αποδείχτηκε από τον Αθανασιάδη[3].

Θεώρημα 4.4.1. Έστω P φυσική unit interval διάταξη στο $[d]$ και $G = \mathrm{inc}(P)$. Τότε

$$\omega X_G(x,t) = \sum_{\lambda \vdash d} \frac{p_\lambda(x)}{z_\lambda} \sum_{w \in N_{P,\lambda}} t^{\mathrm{inv}_G(w)}$$

όπου $N_{P,\lambda}$ το σύνολο των μεταθέσεων του $[d]$ που έχουν την εξής ιδιότητα: αν σπάσουμε την w σε συνεχόμενα κομμάτια μήκους $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, κάθε κομμάτι είναι μετάθεση χωρίς P-καθόδους και χωρίς μη τετριμμένα αριστερά προς τα δεξιά P-μέγιστα. Επομένως οι συντελεστές των δυνάμεων του t στην $\omega X_G(x,t)$ σχηματίζουν μια παλινδρομική, p-θετική ακολουθία.

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε τα παρακάτω λήμματα.
Το πρώτο λήμμα μας δίνει έναν τύπο για τους συντελεστές του αναπτύγματος μιας συμμετρικής συνάρτησης πάνω στη βάση των powersum συμμετρικών συναρτήσεων, όταν γνωρίζουμε το ανάπτυγμά της στις θεμελιώδεις quasi-συμμετρικές συναρτήσεις.

Λήμμα 4.4.2. Έστω $f(x) \in \Lambda_R^d$, όπου R μεταθετική $\mathbb{Q}$-άλγεβρα και $f(x) = \sum_{S \subseteq [d-1]} a_S F_{d,S}$ για κάποια $a_S \in R$. Τότε

$$f(x) = \sum_{\lambda \vdash d} \frac{p_\lambda(x)}{z_\lambda} \sum_{S \in U_\lambda} (-1)^{\# S \setminus S_\lambda} a_S$$

Απόδειξη
Έστω $f(x) = \sum_{\lambda \vdash d} \beta_\lambda s_\lambda$ με $\beta_\lambda \in R$ για κάθε λ.

- Από τον τύπο $s_\lambda(x) = \sum_{T \in \mathrm{SYT}_\lambda} F_{d,\mathrm{Des}(T)}(x)$ (2.5.11) παίρνουμε:
  $f(x) = \sum_{\lambda \vdash d} \beta_\lambda \sum_{T \in \mathrm{SYT}_\lambda} F_{d,\mathrm{Des}(T)} = \sum_{S \subseteq [d-1]} \sum_{\lambda \vdash d} \beta_\lambda \#\{T \in \mathrm{SYT}_\lambda : \mathrm{Des(T)} = S\} F_{d,S}$
  άρα $a_S = \sum_{\lambda \vdash d} \beta_\lambda \#\{T \in \mathrm{SYT}_\lambda : \mathrm{Des(T)} = S\}$

- Από τον τύπο $s_\lambda(x) = \sum_{\mu \vdash d} z_\mu^{-1} p_\mu(x) \sum_{T \in U_\mu(\lambda)} (-1)^{\#\mathrm{Des}(T) \setminus S_\mu}$ (2.4.6) παίρνουμε:
  $f(x) = \sum_{\lambda \vdash d} \beta_\lambda \sum_{\mu \vdash d} z_\mu^{-1} p_\mu(x) \sum_{T \in U_\mu(\lambda)} (-1)^{\#\mathrm{Des}(T) \setminus S_\mu} =$

$$= \sum_{\mu \vdash d} \left(\sum_{S \in U_\mu} (-1)^{\# S \setminus S_\mu} \sum_{\lambda \vdash d} \beta_\lambda \#\{T \in \mathrm{SYT}_\lambda : \mathrm{Des(T)} = S\} \right) \frac{p_\mu}{z_\mu}$$

άρα

$$f(x) = \sum_{\mu \vdash d} \sum_{S \in U_\mu} (-1)^{\# S \setminus S_\mu} a_S \frac{p_\mu}{z_\mu}$$

□

Το δεύτερο λήμμα μας δίνει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στους άκυκλους προσανατολισμούς ενός γραφήματος $G = \mathrm{inc}(P)$ και τις μεταθέσεις του $[d]$ χωρίς P-καθόδους.

Λήμμα 4.4.3. Υπάρχει 1-1 αντιστοιχία $\psi_p : AO(G) \to D(P)$ με $\mathrm{Des}_G(o) = \mathrm{Inv}_G(\psi_P(o))$ και $\mathrm{Sink}(o) = \mathrm{Max}_P(\psi_P(o))$ για κάθε $o \in AO(G)$, όπου $\mathrm{Max}_P(w)$ το σύνολο των από αριστερά προς τα δεξιά P-μεγίστων μιας μετάθεσης w και $D(P)$ το σύνολο των μεταθέσεων του $[d]$ χωρίς P-καθόδους.

Απόδειξη

Έστω $o \in A(G)$. Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{inc}(P) = \mathrm{inc}(P^*)$. Εφαρμόζοντας το λήμμα (4.2.3) για το P^* και τον άκυκλο προσανατολισμό o^* βρίσκουμε επιγραφή ω τέτοια ώστε

$i <_{\tilde{o}} j \Rightarrow \omega(i) < \omega(j)$ και

$i \parallel_{\tilde{o}} j$ και $i <_P j \Rightarrow \omega(i) < \omega(j)$

και θέτουμε $w = \omega^{-1} \in \mathfrak{S}_d$. Δηλαδή η w ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

1. Έστω $B_1 = [d]$ και A_1 το σύνολο των $\tilde{o}$-ελαχιστικών στοιχείων του. Έστω w_1 το ελάχιστο στοιχείο του A_1, με την μερική διάταξη $\leq_P$.

2. Έστω $k = 1, 2, \cdots, d-1$ και ότι έχουν οριστεί τα $w_1, w_2, \cdots, w_k$ του $[d]$. Θέτουμε $B_{k+1} = [d] \setminus \{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$ και A_{k+1} το σύνολο των $\tilde{o}$-ελαχιστικών στοιχείων του. Θέτουμε w_{k+1} το P-ελάχιστο στοιχείο του A_{k+1}.

Τότε:

- $w \in L(\tilde{o}, e)$
  Έστω $x <_{\tilde{o}} y$. Τότε $\omega(x) < \omega(y)$. Αν $x = w_i, y = w_j$ έπεται $\omega(x) = i, \omega(y) = j$, άρα $i < j$. Άρα το x εμφανίζεται αριστερά του y στην w.

- Η w δεν έχει P-καθόδους. Έστω $i \in [d-1]$ με $w_i >_P w_{i+1}$, άρα τα w_i, w_{i+1} δεν συνδέονται με ακμή στο G. Τότε αφού $w \in L(\tilde{o}, e)$ έπεται ότι τα w_i, w_{i+1} είναι μη $\tilde{o}$-συγκρίσιμα. Άρα $\omega(w_i) > \omega(w_{i+1}) \Rightarrow i > i+1$. Άτοπο

- $\mathrm{Des}_G(o) = \mathrm{Inv}_G(w)$
  Έστω $\{w_i, w_j\} \in E(G)$ με $i < j$, επομένως $w_j \to w_i$. Τότε $\{w_i, w_j\} \in \mathrm{Des}_G(o)$ ανν $w_i > w_j$ ανν $\{w_i, w_j\} \in \mathrm{Inv}_G(w)$.

- $\mathrm{Sink}(o) = \mathrm{Max}_P(w)$
  - Έστω x βύθισμα του o και y που εμφανίζεται αριστερά του x στην w.
    Αφού x βύθισμα έπεται ότι $y \not<_{\tilde{o}} x$. Αφού $w \in L(\tilde{o}, e)$ έπεται ότι τα x, y είναι μη $\tilde{o}$-συγκρίσιμα. Επομένως δεν συνδέονται με ακμή στο G άρα είναι P-συγκρίσιμα. Αν $x <_P y$ έπεται $\omega(x) < \omega(y)$ δηλαδή το x εμφανίζεται αριστερά του y στην w. Άτοπο. Άρα $y <_P x$

- Έστω x από αριστερά προς τα δεξιά P-μέγιστο της w.
  Έστω ότι δεν είναι βύθισμα. Τότε υπάρχει y τέτοιο ώστε το x να $\tilde{o}$-καλύπτει το y, άρα $\{x, y\} \in E(G)$. Άρα το y βρίσκεται αριστερά του x στην w. Επομένως $y <_P x$. Άτοπο.

Θέτουμε $\psi_P(o) = w$. Έστω $w \in D(P)$. Ορίζουμε άκυκλο προσανατολισμό o προσανατολίζοντας $i \to j$ όταν $\{i, j\} \in E(G)$ και το j εμφανίζεται αριστερά του i στην w. Τότε $w \in L(\tilde{o}, e)$. Θέτουμε $\phi_P(w) = o$.

- $\phi_P \circ \psi_P = 1_{AO(G)}$
  Για κάθε μετάθεση w υπάρχει μοναδικός άκυκλος προσανατολισμός o ώστε $w \in L(\tilde{o}, e)$.
- $\psi_P \circ \phi_P = 1_{D(P)}$

Έστω $a \in D(P)$ με $\phi_P(w) = o$ και $\psi_P(o) = w$. Υποθέτουμε ότι $a \neq w$. Έστω $k = \min\{i \in [d] : w_i \neq a_i\}$. Τότε το $x = w_k$ είναι το $P-$ελάχιστο του A_k. Επειδή $B_k = [d] \setminus \{w_1, w_2, \cdots, w_{k-1}\} = [d] \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}\}$ και $a \in L(\tilde{o}, e)$ έπεται ότι το a_k είναι $\tilde{o}$-ελαχιστικό στοιχείο του B_k. Άρα $a_k \in A_k$, οπότε $x <_P a_k$. Έστω $x = a_l$ με $l \geq k + 1$. Το a_l είναι $\tilde{o}$-ελαχιστικό στοιχείο του $[d] \setminus \{a_1, \cdots, a_{k-1}\}$, άρα είναι μη $\tilde{o}$-συγκρίσιμο με τα $a_k, \cdots, a_{l-1}$. Άρα το x είναι P-συγκρίσιμο με το a_i, για $i = k, \cdots, l-1$ και επιπλέον $x <_P a_k$. Έστω $r = \max\{i = k, \cdots, l-1 : x <_P a_i\}$. Τότε $x <_P a_r$ και $x \geq_P a_{r+1}$, άρα $a_r >_p a_{r+1}$. Άτοπο, γιατί η a δεν έχει P-καθόδους.

□

Επομένως αν $X_{\mathrm{inc}(P)} = \sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda(t) s_\lambda(x)$ έχουμε

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Par}(n,j)} c_\lambda(t) = \sum_{w \in D(P,j)} t^{\mathrm{inv}_G(w)}$$

όπου $D(P, j)$ το σύνολο των μεταθέσεων του $[d]$ χωρίς P-καθόδους και με ακριβώς j από αριστερά προς τα δεξιά P-μέγιστα.
Ειδικότερα

$$c_{(d)}(t) = \sum_{w \in N(P)} t^{\mathrm{inv}_G(w)}$$

όπου $N(P) = D(P, 1)$ το σύνολο των $w \in \mathfrak{S}_d$ χωρίς P-καθόδους και χωρίς μη τετριμμένα αριστερά προς τα δεξιά $P-$μέγιστα.

Παράδειγμα 4.4.4. $d = 5$, $P = P(2, 3, 4, 5)$, $G = G(2, 3, 4, 5) = P_5$

- $N(P) = \{12345, 21345, 32145, 43215, 54321\}$

$$c_{(5)}(t) = \sum_{w \in N(P)} t^{\mathrm{inv}_G(w)} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4$$

- $D(P, 2) = \{13245, 12435, 12354, 12543, 14325, 21354, 21435, 15432, 32154, 21543\}$

$$c_{(4,1)}(t) + c_{(3,2)}(t) = \sum_{w \in D(P,2)} t^{\mathrm{inv}_G(w)} = 3t + 4t^2 + 3t^3$$

- $D(P,3) = \{13254\}$
$$c_{(2,2,1)}(t) = \sum_{w \in D(P,3)} t^{\mathrm{inv}_G(w)} = t^2$$

Με βάση τα παραπάνω παίρνουμε το τρίτο λήμμα που θα μας χρειαστεί στην απόδειξη του θεωρήματος.

Λήμμα 4.4.5. Έστω $\omega X_{\mathrm{inc}(P)}(x,t) = \sum_{\lambda \vdash d} \frac{1}{z_\lambda} b_\lambda(t) p_\lambda(x)$.
Τότε
$$b_{(d)}(t) = \sum_{w \in N(P)} t^{\mathrm{inv}_G(w)}$$

Απόδειξη
$\omega X_G(x,t) = \sum_{\lambda \vdash d} c_\lambda h_\lambda(x) = \sum_{\lambda \vdash d} \frac{1}{z_\lambda} b_\lambda(t) p_\lambda(x)$. Επειδή ο συντελεστής του $p_{(d)}$ στο $h_\lambda(x)$ για $\lambda \neq (d)$ είναι μηδέν και $h_d = \sum_{\mu \vdash d} \frac{1}{z_\mu} p_\mu(\chi)$ παίρνουμε ότι $b_{(d)}(t) = c_{(d)}(t)$.

□

Το προηγούμενο λήμμα αποδείχτηκε πρώτα από τους Shareshian και Wachs με τη χρήση του κανόνα Murnaghan-Nakayama[23]. Εδώ δώσαμε την απόδειξη του Αθανασιάδη[3].
Απόδειξη θεωρήματος
Από το (4.2.5) ισχύει
$\omega X_{\mathrm{inc}(P)}(x,t) = \sum_{S \subseteq [d-1]} \left(\sum_{w \in \mathfrak{S}_d, \mathrm{Des}_P(w) = S} t^{\mathrm{inv}_G(w)} \right) F_{d,S}$ άρα από το (4.4.2) έπεται ότι

$$b_\lambda(t) = \sum_{S \in U_\lambda} (-1)^{\# S \setminus S_\lambda)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_d, \mathrm{Des}_P(w) = S} t^{\mathrm{inv}_G(w)} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_d, \mathrm{Des}_P(w) \in U_\lambda} (-1)^{\# \mathrm{Des}_P(w) \setminus S_\lambda} t^{\mathrm{inv}_G(w)} \tag{4.4}$$

Για $\lambda = (d)$ παίρνουμε

$$\sum_{w \in N(P)} t^{\mathrm{inv}_G(w)} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_d, \mathrm{Des}_P(w) \in U_{(d)}} (-1)^{\# \mathrm{Des}_P(w)} t^{\mathrm{inv}_G(w)} \tag{4.5}$$

Έστω $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \vdash d$, με $S_\lambda = \{r_1 < r_2 < \cdots < r_{k-1}\}$. Ορίζουμε 1-1 αντιστοιχία g ως εξής:
Έστω $w = (a_1, a_2, \cdots, a_d) \in \mathfrak{S}_d$. Θέτουμε $B_i = \{a_{r_{i-1}+1}, a_{r_{i-1}+2}, \cdots, a_{r_i}\}$ για $i = 1, 2, \cdots, k$ και $\pi = (B_1, B_2, \cdots, B_k) \in \Pi_\lambda$, όπου Π_λ το σύνολο των διατεταγμένων διαμερίσεων του $[d]$ τύπου λ. Επιπλέον $w_i = (a_{r_{i-1}+1}, a_{r_{i-1}+2}, \cdots, a_{r_i}) \in \mathfrak{S}_{B_i}$, P_i το επαγόμενο υπογράφημα του P στο B_i και $G_i = \mathrm{inc}(P_i)$. Θέτουμε $g(w) = (\pi, w_1, \cdots, w_k)$. Τότε

- $\mathrm{inv}_G(w) = \mathrm{inv}_G(\pi) + \mathrm{inv}_{G_1}(w_1) + \cdots + \mathrm{inv}_{G_k}(w_k)$ όπου $\mathrm{inv}_G(\pi) = \#\{\{i,j\} \in E(G) : i \in B_k, j \in B_l$ με $i < j$ και $k > l\}$
- $\mathrm{Des}_P(w) \in U_\lambda$ ανν $\mathrm{Des}_{P_i}(w_i) \in U_{(\lambda_i)}$ για $i = 1, \cdots, k$

- $\mathrm{Des}_P(w) \setminus S_\lambda = \mathrm{Des}_{P_1}(w_1) \uplus \cdots \uplus \mathrm{Des}_{P_k}(w_k)$
- $w \in N_{P,\lambda}$ ανν $w_i \in N(P_i)$ για $i = 1, \cdots, k$,

άρα $b_\lambda(t) = \displaystyle\sum_{\pi=(B_1,\cdots,B_k)\in\Pi_\lambda} t^{\mathrm{inv}_G(\pi)} \sum_{w\in\mathfrak{S}_{B_1},\mathrm{Des}_P(w_1)\in U_{(\lambda_1)}} (-1)^{\#\mathrm{Des}_{P_1}(w_1)} t^{\mathrm{inv}_{G_1}(w_1)} \ldots$

και από το (4.5) παίρνουμε

$$b_\lambda(t) = \sum_{\pi=(B_1,\cdots,B_k)\in\Pi_\lambda} t^{\mathrm{inv}_G(\pi)} \sum_{w_1\in N(P_1)} t^{\mathrm{inv}_{G_1}(w_1)} \ldots \sum_{w_k\in N(P_k)} t^{\mathrm{inv}_{G_\kappa}(w_k)} = \sum_{w\in N_{P,\lambda}} t^{\mathrm{inv}_G(w)}$$

□

Ένας εναλλακτικός τύπος για τους συντελεστές $b_\lambda(t)$ περιγράφεται παρακάτω.
Έστω o άκυκλος προσανατολισμός του G και $\pi = (B_1, \cdots, B_k) \in \Pi_\lambda$. Ονομάζουμε G_i το επαγόμενο υπογράφημα του G στο B_i, για $i = 1, \cdots, k$ και o_i τον περιορισμό του o στο G_i. Συμβολίζουμε με $A^*(G, \pi)$ το σύνολο των o για τους οποίους:

1. $\mathrm{sink}(w_i) = 1$ για κάθε i
2. Αν $\{i, j\} \in E$ με $i \in B_k, j \in B_l$ με $k < l$ τότε $j \to i$

Παρατηρούμε ότι το $A^*(G, \pi)$ είναι μη κενό ανν π είναι συνεκτική διατεταγμένη διαμέριση του G.

Πόρισμα 4.4.6.
$$b_\lambda(t) = \sum_{\pi\in\Pi_\lambda} t^{\mathrm{inv}_G(\pi)} \sum_{o\in A^*(G,\pi)} t^{\mathrm{des}_G(o)}$$

Θα αποδείξουμε τώρα έναν κλειστό τύπο για τον συντελεστή $c_{(d)}(t) = b_{(d)}(t) = \displaystyle\sum_{w\in N(P)} t^{\mathrm{inv}_G(w)}$.

Θεώρημα 4.4.7. Έστω P φυσική unit interval διάταξη και $G = \mathrm{inc}(P)$.
Τότε
$$\sum_{w\in N(P)} t^{\mathrm{inv}_G(w)} = [d]_t \prod_{i=2}^{d} [b_i]_t$$
όπου $b_i = \#\{\{i, j\} \in E(G) : j < i\}$
Άρα είναι θετικό, παλινδρομικό και μονότροπο πολυώνυμο με κέντρο συμμετρίας $\dfrac{q}{2}$.
Απόδειξη
Έστω $N^1(P) = \{w \in N(P) : w(1) = 1\}$, $P^1 = P \setminus \{1\}$ και $G^1 = \mathrm{inc}(P^1)$.

- $$\sum_{w\in N^1(P)} t^{\mathrm{inv}_G(w)} = \prod_{i=2}^{d} [b_i]_t$$

  Έστω $w \in N^1(P)$. Τότε το μοναδικό από αριστερά προς τα δεξιά P-μέγιστο της w είναι το 1. Για $i = 1, 2, \cdots, d$ συμβολίζουμε με w_i την επαγόμενη μετάθεση του $\{1, \cdots, i\}$ που προκύπτει από την w. Δείχνουμε ότι η w_i δεν έχει P-καθόδους και μη τετριμμένα από αριστερά προς τα δεξιά P-μέγιστα, για καθε i.

- $w_d = w$.
- Έστω $k = 2, \cdots, d$ και ότι η w_k δεν έχει P-καθόδους και μη τετριμμένα από αριστερά προς τα δεξιά P-μέγιστα. Θα δείξουμε ότι ούτε η w_{k-1} έχει P-καθόδους και μη τετριμμένα από αριστερά προς τα δεξιά P-μέγιστα. Τότε $w_k = (\cdots x\, k\, y \cdots)$, για κάποια $x, y \in \{1, \cdots, k-1\}$ με $y \parallel_P k$. Υποθέτουμε ότι η αφαίρεση του k δημιουργεί P-κάθοδο, δηλαδή $x >_P y$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:
  * $k \parallel_P x$
    Αφού το P είναι φυσική unit interval διάταξη έπεται ότι $x > k > y$. Άτοπο.
  * $x <_P k$
    Τότε $k >_P y$. Άτοπο.

  Υποθέτουμε τώρα ότι με την αφαίρεση του k το y γίνεται από αριστερά προς τα δεξιά P-μέγιστο. Το k δεν είναι από αριστερά προς τα δεξιά μέγιστο της w_k, άρα υπάρχει z με $z \parallel_P k$, που εμφανίζεται αριστερά του k. Τότε $z <_P y$, άρα $z < k < y$. Άτοπο.

Για $i = 2, \cdots, d$ θέτουμε $B_i = \{j < i : \{i, j\} \in E(G)\}$.
Θα ορίσουμε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\psi : N^1(P) \to \{0, 1, \cdots, b_2 - 1\} \times \cdots \times \{0, 1, \cdots, b_d - 1\}$, τέτοια ώστε αν $\psi(w) = (l_2, \cdots, l_d)$ έπεται $\mathrm{inv}_G(w) = l_2 + \cdots + l_d$ οπότε έπεται το ζητούμενο.
Έστω $w \in N^1(P)$. Για $i = 2, \cdots, d$ συμβολίζουμε
$\psi_i(w) = \#\{j = 1, 2, \cdots, i-1 : \{i, j\} \in E(G)$ και το j εμφανίζεται δεξιά του i στην $w_i\}$, το οποίο είναι μικρότερο ή ίσο του b_i.
Μάλιστα $\psi_i(w) < b_i$ γιατί το i δεν είναι από αριστερά προς τα δεξιά μέγιστο της w_i, άρα υπάρχει στοιχείο του B_i που εμφανίζεται αριστερά του i στην w_i. Θέτουμε $\psi(w) = (\psi_2(w), \cdots, \psi_d(w))$.
Αντίστροφα έστω $(l_2, \cdots, l_{d-1}) \in \{0, 1, \cdots, b_2 - 1\} \times \cdots \{0, 1, \cdots, b_d - 1\}$. Βρίσκουμε την $w \in N^1(P)$ για την οποία $\psi(w) = (l_2, \cdots, l_d)$, σχηματίζοντας τις $w_1, w_2, \cdots$ ως εξής:

- Θέτουμε $w_1 = (1)$
- Έστω τώρα $k = 2, \cdots d$ και ότι έχουμε βρει την w_{k-1}. Η w_k δεν έχει P-καθόδους, άρα προκύπτει τοποθετώντας το k στην w_{k-1} ακριβώς πριν το l_k–οστό από δεξιά στοιχείο του B_k. Αφού $l_k < b_k$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο x μη συγκρίσιμο με το k που εμφανίζεται αριστερά του k στην w_k, άρα το k δεν είναι από αριστερά προς τα δεξιά P–μέγιστο.

•
$$\sum_{w \in N(P) \setminus N^1(P)} t^{\mathrm{inv}_G(w)} = (t + t^2 + \cdots + t^{m_1 - 1}) \sum_{w \in N(P^1)} t^{\mathrm{inv}_{G_1}(w)}$$

Θα βρούμε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία
$f : N(P) \setminus N^1(P) \to \{1, 2, \cdots, m_1 - 1\} \times N(P^1)$ τέτοια ώστε αν $f(w) = (i, w')$ ισχύει $\mathrm{inv}_G(w) = i + \mathrm{inv}_{G_1}(w')$, οπότε έπεται το ζητούμενο. Έστω $w \in N(P) \setminus N^1(P)$. Θέτουμε w' τη μετάθεση του $\{2, \cdots, d\}$ που προκύπτει από την w αφαιρώντας το 1 και i το πλήθος των $j = 2, 3, \cdots, m_1$ που εμφανίζονται αριστερά του 1 στην w. Αφού το 1 δεν βρίσκεται στην αρχή της w και δεν υπάρχουν P-κάθοδοι, θα εμφανίζεται αμέσως

μετά από κάποιο στοιχείο του $\{2, 3, \cdots, m_1\}$, άρα $i \in \{1, 2, \cdots, m_1 - 1\}$. Όμοια με πριν μπορύμε να δείξουμε ότι $w' \in N(P^1)$. Θέτουμε $f(w) = (i, w')$.
Αντίστροφα έστω $(i, \sigma) \in \{1, 2, \cdots, m_1 - 1\} \times N(P^1)$. Βρίσκουμε την $w \in N(P) \setminus N^1(P)$ για την οποία $f(w) = (i, \sigma)$ τοποθετώντας το 1 στην w αμέσως μετά το $i-$οστό στοιχείο του $\{2, 3, \cdots, m_1\}$.

Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε φυσική unit interval διάταξη με το πολύ $d-1$ στοιχεία. Θα δείξουμε ότι ισχύει για φυσικές unit interval διατάξεις με d στοιχεία.

$$\sum_{w \in N(P^1)} t^{\mathrm{inv}_{G^1}(w)} = [d-1]_t \prod_{i=3}^{d} [b_i(G^1)]_t$$

όπου $b_i(G^1) = \#\{\{i, j\} \in E(G) : j = 2, \cdots, i-1\}$.

- Έστω $i = 3, \cdots, m_1$. Το $\{2, \cdots, m_1\}$ είναι κλίκα του G^1, άρα $b_i(G^1) = i - 2 = b_i - 1$.
- Έστω $i = m_1 + 1, \cdots, d$. Τότε $\{i, 1\} \notin E(G)$ άρα $b_i(G^1) = b_i$.

άρα $\displaystyle\sum_{w \in N(P^1)} t^{\mathrm{inv}_{G^1}(w)} = [d-1]_t \prod_{i=3}^{m_1} [i-2]_t \prod_{i=m_1+1}^{d} [b_i]_t = [d-1]_t \prod_{2}^{m_1-1} [b_i]_t \prod_{i=m_1+1}^{d} [b_i]_t$

Επομένως $\displaystyle\sum_{w \in N(P) \setminus N^1(P)} t^{\mathrm{inv}_G(w)} = t[m_1 - 1]_t [d-1]_t \prod_{2}^{m_1-1} [b_i]_t \prod_{i=m_1+1}^{d} [b_i]_t = t[d-1]_t \prod_{i=2}^{d} [b_i]_t$

Τελικά $\displaystyle\sum_{w \in N(P)} t^{\mathrm{inv}_G(w)} = \prod_{i=2}^{d} [b_i]_t + t[d-1]_t \prod_{i=2}^{d} [b_i]_t = [d]_t \prod_{i=2}^{d} [b_i]_t.$

□

Πόρισμα 4.4.8. Για την κλίκα K_d ισχύει $\mathrm{X}_{K_d}(x, t) = [d]_t! e_{(d)}$

Θα εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα (4.4.1) στην περίπτωση των γραφημάτων P_d.

Πρόταση 4.4.9.

$$\omega X_{P_d}(x, t) = \sum_{\lambda \vdash d} \left(A_{l(\lambda)}(t) [\lambda_1]_t \cdots [\lambda_{l(\lambda)}]_t \right) \frac{p_\lambda(x)}{z_\lambda}$$

Απόδειξη

- $b_{(d)}(t) = [d]_t = 1 + t + \cdots + t^{d-1}$, λόγω του θεωρήματος (4.4.7)
- $b_\lambda(t) = [\lambda_1]_t \cdots [\lambda_{l(\lambda)}]_t \displaystyle\sum_{\pi \in \Pi_\lambda} t^{\mathrm{inv}_{P_d}(\pi)}$
  Οι συνεκτικές διαμερίσεις του P_d είναι της μορφής $\{\{1, \cdots, a_1\}, \{a_1 + 1, \cdots, a_1 + a_2\}, \cdots\}$
  Αν π συνεκτική διατεταγμένη διαμέριση τύπου λ, τότε το G_i είναι μονοπάτι με λ_i κορυφές

για κάθε i, άρα $\displaystyle\sum_{o_k \in A^*(P_{\lambda_i})} t^{\mathrm{des}_{P_{\lambda_i}}(o_i)} = [\lambda_i]_t$ άρα

$b_\lambda(t) = \displaystyle\sum_{\pi=(B_1,\cdots,B_k)\in\Pi_\lambda} t^{\mathrm{inv}_G(\pi)} \sum_{o_1\in A^*(G_1)} t^{\mathrm{des}_{G_1}(o_1)} \cdots \sum_{o_k\in A^*(G_k)} t^{\mathrm{des}_{G_k}(o_k)} =$
$[\lambda_1]_t \cdots [\lambda_{l(\lambda)}]_t \displaystyle\sum_{\pi\in\Pi_\lambda} t^{\mathrm{inv}_{P_d}(\pi)}$

- $\displaystyle\sum_{\pi\in\Pi_\lambda} t^{\mathrm{inv}_{P_d}(\pi)} = \sum_{w\in\mathfrak{S}_{l(\lambda)}} t^{\mathrm{des}(w)}$

  Έστω $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$. Για $w = (w_1, \cdots, w_k) \in \mathfrak{S}_k$ ορίζουμε $\pi(w) = (B_1, \cdots, B_k)$ με
  $B_{w_1} = \{1, 2, \cdots, \lambda_{w_1}\}$
  $B_{w_2} = \{\lambda_{w_1} + 1, \cdots, \lambda_{w_1} + \lambda_{w_2}\} \cdots,\ B_{w_k} = \{\lambda_{w_1} + \cdots + \lambda_{w_{k-1}} + 1, \cdots, d\}$
  Αντίστροφα, έστω $\pi = (B_1, B_2, \cdots, B_k) \in \Pi_\lambda$ συνεκτική. Για $i = 1, \cdots, k$ ορίζουμε $m_i = \min B_i$ και $M_i = \max B_i$. Τότε επιλέγουμε $w = w(\pi) \in \mathfrak{S}_k$ τέτοια ώστε $m_{w_1} < \cdots < m_{w_k}$.
  Παρατηρούμε ότι $\mathrm{des}(w) = \mathrm{inv}_{P_d}(\pi)$
  Έστω $i = 1, \cdots, d-1$. Τότε $m_{w_{i+1}} = M_{w_i} + 1$, άρα $\{m_{w_{i+1}}, M_{w_i}\} \in E(P_d)$, με $M_{w_i} < m_{w_{i+1}}$. Επιπλέον $M_{w_i} \in B_{w_i}$ και $m_{w_{i+1}} \in B_{w_{i+1}}$. Άρα το i είναι κάθοδος της w ανν $w_i > w_{i+1}$ ανν $\{m_{w_{i+1}}, M_{w_i}\}$ είναι G-αντιστροφή της π.

□

Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την γεννήτρια συνάρτηση $\displaystyle\sum_{d\geq 0} X_{P_d}(x,t)z^d$, παίρνοντας έτσι το αποτέλεσμα που αναφέραμε νωρίτερα (4.3.3). Η απόδειξη είναι ανάλογη της απόδειξης του θεωρήματος (3.2.10).

Θεώρημα 4.4.10.

$$\sum_{d\geq 0} X_{P_d}(x,t)z^d = \frac{(1-t)E(z)}{E(tz) - tE(z)}$$

Απόδειξη

$X_{P_d}(x,t) = \displaystyle\sum_{\lambda\vdash d} \left(A_{l(\lambda)}(t)[\lambda_1]_t \cdots [\lambda_{l(\lambda)}]_t\right) \frac{\epsilon_\lambda p_\lambda(x)}{z_\lambda} =$

$= \displaystyle\sum_{\lambda\vdash d} \binom{l(\lambda)}{r_1, r_2, \cdots} \frac{(-1)^{l(\lambda)} A_{l(\lambda)}(t)}{l(\lambda)!} \frac{(-1)^{\lambda_1}[\lambda_1]_t p_{\lambda_1}(x)}{\lambda_1} \cdots \frac{(-1)^{\lambda_{l(\lambda)}}[\lambda_{l(\lambda)}]_t p_{\lambda_{l(\lambda)}}(x)}{\lambda_{l(\lambda)}} =$

$= \displaystyle\sum_{a\vDash d} \frac{(-1)^{l(a)} A_{l(a)}(t)}{l(a)!} \frac{(-1)^{a_1}[a_1]_t p_{a_1}(x)}{a_1} \cdots \frac{(-1)^{a_{l(a)}}[a_{l(a)}]_t p_{a_{l(a)}}(x)}{a_{l(a)}} =$

άρα $\displaystyle\sum_{d\geq 0} X_{P_d}(x,t)z^d = \sum_{d\geq 0}\sum_{a\vDash d} \frac{(-1)^{l(a)} A_{l(a)}(t)}{l(a)!} \frac{(-z)^{a_1}[a_1]_t p_{a_1}(x)}{a_1} \cdots \frac{(-z)^{a_{l(a)}}[a_{l(a)}]_t p_{a_{l(a)}}(x)}{a_{l(a)}} =$

$\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k A_k(t)}{k!} \sum_{(a_1,a_2,\cdots,a_k)\in\mathbb{Z}^k_{>0}} \frac{(-z)^{a_1}[a_1]_t p_{a_1}(x)}{a_1} \cdots \frac{(-z)^{a_k}[a_k]_t p_{a_k}(x)}{a_k} =$

$$= \sum_{k\geq 0} A_k(t) \frac{\left(\sum_{i\geq 1} \frac{-(-z)^i[i]_t p_i}{i}\right)^k}{k!} \text{ και } \sum_{k\geq 0} A_k(t)\frac{z^k}{k!} = \frac{1-t}{\exp z(t-1)-t} \text{ άρα}$$

$$\sum_{d\geq 0} X_{P_d}(x,t)z^d = \frac{1-t}{\exp(1-t)\sum_{i\geq 1}\frac{[i]_t p_i}{i}(-z)^i - t}$$

και από τη σχέση $(1-t)\sum_{i\geq 1}\frac{[i]_t p_i(-z)^i}{i} = \log\prod_{i\geq 1}\frac{1+tx_iz}{1+x_iz}$ έπεται ότι

$$\sum_{d\geq 0} X_{P_d}(x,t)z^d = \frac{1-t}{\prod_{i\geq 1}\frac{1+tx_iz}{1+x_iz} - t}$$

Μένει να δείξουμε ότι $\frac{1}{\prod_{i\geq 1}\frac{1+tx_iz}{1+x_iz} - t} = \frac{E(z)}{E(tz)-tE(z)}$

$$E(z)\prod_{i\geq 1}\left(\frac{1+tx_iz}{1+x_iz} - t\right) = \prod_{i\geq 1}(1+x_iz)\left(\frac{1+tx_iz}{1+x_iz} - t\right) = \prod_{i\geq 1}(1+tx_iz) - t\prod_{i\geq 1}(1+x_iz) =$$
$$= E(tz) - tE(z)$$

$\square$

4.5 Ανάπτυγμα στη Βάση των Συναρτήσεων Schur

Οι Shareshian και Wachs απέδειξαν ότι στην περίπτωση που το P είναι φυσική unit interval διάταξη, οι συντελεστές των δυνάμεων του t σχηματίζουν μια Schur-θετική ακολουθία και διατύπωσαν την εικασία ότι η ακολουθία αυτή είναι επιπλέον Schur-μονότροπη. Η εικασία αυτή αποδείχτηκε μέσω της σύνδεσης των χρωματικών quasi-συμμετρικών συναρτήσεων με τις ποικιλότητες Hessenberg, όπως θα δούμε στην τελευταία ενότητα.
Θα δούμε τώρα το θεώρημα των Shareshian και Wachs που δίνει μια συνδυαστική ερμηνεία αυτών των συντελεστών, ανάλογη με αυτήν του Gasharov στην περίπτωση των χρωματικών συμμετρικών συναρτήσεων.

Ορισμός 4.5.1. Έστω P-ταμπλώ T και $G = \mathrm{inc}(P)$. Ένα ζεύγος $\{i,j\} \in E(G)$ θα λέγεται G-αντιστροφή του T, αν $i<j$ και το i εμφανίζεται χαμηλότερα από το j στο T.

Έστω $\mathrm{Inv}_G(T)$ το σύνολο των G-αντιστροφών του T και $\mathrm{inv}_G(T)$ το πλήθος τους. Συμβολίζουμε με T_P το σύνολο όλων των P-ταμπλώ και με $T_{P,\lambda}$ το σύνολο όλων των P-ταμπλώ σχήματος λ.

Θεώρημα 4.5.2. Έστω P είναι φυσική unit interval διάταξη στο $[d]$ και $G = \mathrm{inc}(P)$. Τότε

$$X_G = \sum_{T\in T_P} t^{\mathrm{inv}_G(T)} s_{\lambda(T)}(x)$$

Επομένως οι συντελεστές των δυνάμεων του t στην $\omega X_G(x,t)$ σχηματίζουν μια παλινδρομική, Schur-θετική ακολουθία.
Απόδειξη
Έστω $X_G(x,t) = \sum_{\lambda \vdash d} d_\lambda(t) s_\lambda(x)$. Θα δείξουμε ότι $d_\lambda(t) = \sum_{T \in T_{P,\lambda}} t^{\mathrm{inv}_G(T)}$.

- Αφού $X_G(x,t) \in \Lambda^d_{\mathbb{Q}[t]}$ ισχύει $X_G(x,t) = \sum_{\lambda \vdash d} \beta_\lambda(t) m_\lambda(x)$, όπου $\beta_\lambda(t) = \sum_{\kappa \in K_\lambda(G)} t^{\mathrm{des}_G(\kappa)}$.
  Τότε ισχύει $\langle X_G(x,t), h_\lambda(x) \rangle = \beta_\lambda(t)$, για κάθε $\lambda \vdash d$.

- $\langle X_G(x,t), s_\lambda(x) \rangle = d_\lambda(t)$, για κάθε $\lambda \vdash d$

- $s_\lambda(x) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} \epsilon_w h_{w(\lambda)}(x)$ (ταυτότητα Jacobi-Trudi)
  όπου $w(\lambda) = \{\lambda_{w_j} - w_j + j\}_{j=1}^l$, για $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l)$, με $h_0 = 1$ και $h_i = 0$ για $i < 0$

- $d_\lambda(t) = \langle X_G(x,t), s_\lambda(x) \rangle = \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} \epsilon_w \langle h_{w(\lambda)}(x), X_G(x,t) \rangle = \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} \epsilon_w \beta_{w(\lambda)}(t) =$
  $\sum_{w \in \mathfrak{S}_d} \sum_{\kappa \in K_{w(\lambda)}(G)} \epsilon_w t^{\mathrm{des}_G(\kappa)}$ όπου $\beta_{w(\lambda)}(t) = 0$ αν $\lambda_{w_j} - w_j + j < 0$ για κάποιο j.

Η έννοια της G-αντιστροφής μπορεί να γενικευτεί και στην περίπτωση των P-παρατάξεων. Έστω $\phi_{P,a}$ η απεικόνιση που ορίσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος (3.3.2). Παρατηρούμε ότι αν $\phi_{P,a}(\kappa) = T$, ισχύει $\mathrm{Des}_G(\kappa) = \mathrm{Inv}_G T$. Πράγματι, αν $i, j \in [d]$, με $i < j$ το $\{i,j\}$ είναι G-κάθοδος του κ ανν $\{i,j\} \in E(G)$ και $\kappa(i) > \kappa(j)$ ανν $\{i,j\} \in E(G)$ και το i εμφανίζεται χαμηλότερα απ' το j στην T ανν το $\{i,j\}$ είναι G-αντιστροφή της T.
Άρα $d_\lambda(t) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} \sum_{T \in \Pi_{P,\omega(\lambda)}} \epsilon_w t^{\mathrm{inv}_G(T)}$. Έστω A το σύνολο των ζευγών (w,T), όπου $w \in S_l$ και $T \in \Pi_{P,\omega(\lambda)}$. Τότε

$$d_\lambda(t) = \sum_{(w,T) \in A} \epsilon_w t^{\mathrm{inv}_G(T)}$$

Αν B είναι το σύνολο των $(w,T) \in A$ με T όχι P-ταμπλώ έχουμε

$$d_\lambda(t) = \sum_{T \in T_{P,\lambda}} t^{\mathrm{inv}_G(T)} + \sum_{(w,T) \in \mathrm{B}} \epsilon_w t^{\mathrm{inv}_G(T)}$$

Θα ορίσουμε αυτοαντίστροφη απεικόνιση $\psi : B \longrightarrow B$ τέτοια ώστε αν $\psi(w,T) = \phi(w',T')$ να ισχύει $\epsilon_w = -\epsilon_{w'}$ και $\mathrm{inv}_G(T) = \mathrm{inv}_G(T')$ και το ζητούμενο έπεται.
Για $(w,T) \in B$ ορίζουμε $r = r(T)$ και $c = c(T)$, όπως στην απόδειξη του (3.3.2). Έστω $C_r(T) = \{a_{r,c}, a_{r,c+1}, \cdots\}$ $C_{r+1}(T) = \{a_{r+1,c+1}, a_{r+1,c+2}, \cdots\}$
$I_r(T) = \{a_{r,1}, a_{r,2}, \cdots, a_{r,c-1}\}$ $I_{r+1}(T) = \{a_{r+1,1}, a_{r+1,2}, \cdots, a_{r+1,c}\}$
Στην απόδειξη (3.3.2) ορίσαμε το T' αντικαθιστώντας τα στοιχεία των $C_{r+1}(T)$ και $C_r(T)$. Εδώ θα ορίσουμε το T' αντικαθιστώντας κατάλληλα υποσύνολά τους, γιατί θέλουμε να διατηρείται επιπλέον το πλήθος των G-αντιστροφών.
Έστω H το επαγόμενο υπογράφημα του G στο σύνολο κορυφών $C_r(T) \cup C_{r+1}(T)$. Θέτουμε $O_r(T) = O_{C_r(T)}(H)$, $E_r(T) = E_{C_r(T)}(H)$, $O_{r+1}(T) = O_{C_{r+1}(T)}(H)$ και $E_{r+1}(T) =$

$E_{C_{r+1}(T)}(H)$, με βάση τους ορισμούς που δώσαμε στην παρατήρηση (4.1.7).
Όπως είδαμε στην απόδειξη του (3.3.2), τα $I_r(T) \cup C_{r+1}(T)$ και $I_{r+1}(T) \cup C_r(T)$ είναι αλυσίδες του P, άρα και τα $I_r(T) \cup \mathrm{O}_{r+1}(T)$ και $I_{r+1}(T) \cup \mathrm{O}_r(T)$ είναι αλυσίδες. Το $O_{r+1}(T) \cup E_r(T)$ είναι ευσταθές υποσύνολο του $V(G)$ άρα αλυσίδα του P. Άρα το $I_r(T) \cup E_r(T) \cup O_{r+1}(T)$ είναι αλυσίδα του P και το $I_r(T)$ αρχικό τμήμα της. Όμοια η $I_{r+1}(T) \cup E_{r+1}(T) \cup O_r(T)$ είναι αλυσίδα του P και το $I_{r+1}(T)$ αρχικό τμήμα της.
Έστω κ' ο χρωματισμός του G που ορίζεται ως εξής:

$$\kappa'(x) = \begin{cases} r, \text{αν } x \in I_r(T) \cup E_r(T) \cup O_{r+1}(T) \\ r+1, \text{αν } x \in I_{r+1}(T) \cup E_{r+1}(T) \cup O_r(T) \\ \kappa(x), \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ο κ' είναι γνήσιος χρωματισμός του G γιατί όπως δείξαμε ότι τα σύνολα $I_r(T) \cup E_r(T) \cup O_{r+1}(T)$ και $I_{r+1}(T) \cup E_{r+1}(T) \cup O_r(T)$ είναι αλυσίδες του P. Έστω T' η $P-$ παράταξη που αντιστοιχεί στον κ'. Δηλαδή, η T' προκύπτει από την T μετακινώντας μόνο τα στοιχεία των συνόλων $O_{r+1}(T)$ και $O_r(T)$. Θέτουμε $w' = w \circ (r\, r+1)$ και $\psi(w, T) = (w', T')$.
Από το λήμμα (4.1.8) έπεται ότι:

- $\#E_r(T) = \#E_{r+1}(T)$
- $\#\{\{x, y\} \in E(G) : x \in O_r(T), y \in O_{r+1}(T) \text{ και } x < y\} =$
  $\#\{\{x, y\} \in E(G) : x \in O_r(T), y \in O_{r+1}(T) \text{ και } x > y\}$

Τότε έχουμε τα παρακάτω:

1. $\epsilon_w = -\epsilon_{w'}$
2. Το T' δεν είναι P-ταμπλώ
   Έστω ότι το $a'_{r,c}$ ορίζεται. Θα δείξουμε ότι $a'_{r,c} >_P a'_{r+1,c} = a_{r+1,c}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
   - $a'_{r,c} \in E_r(T)$
     Τότε το $a_{r,c}$ ορίζεται και $a_{r,c} >_P a_{r+1,c}$. Έχουμε $a'_{r,c} \in C_r(T)$ άρα $a'_{r,c} \geq_P a_{r,c} >_P a_{r+1,c}$
   - $a'_{r,c} \in O_{r+1}(T)$
     Τότε $a'_{r,c} \in C_{r+1}(T)$, άρα $a'_{r,c} >_P a_{r+1,c}$
3. Το σχήμα του T' είναι $w'(\lambda)$
   Η r γραμμή του T έχει $\lambda_{w_r} - w_r + r = \#I_r(T) + \#O_r(T) + \#E_r(T)$ στοιχεία και είδαμε ότι $\#E_r(T) = \#E_{r+1}(T)$ άρα η $r+1$ γραμμή του T' έχει
   $\#I_{r+1}(T) + \#O_r(T) + \#E_{r+1}(T) = \lambda_{w'_{r+1}} - w'_{r+1} + (r+1)$ στοιχεία
4. $\psi(w', T') = (w, T)$
   $r(T') = r(T)$, $c(T') = c(T)$
   $O_r(T') = O_{r+1}(T)$, $O_r(T) = O_{r+1}(T')$
5. $\mathrm{inv}_G(T) = \mathrm{inv}_G(T')$
   Ισοδύναμα $\mathrm{des}_G(\kappa) = \mathrm{des}_G(\kappa')$. Αρκεί να περιοριστούμε στις ακμές του G με κορυφές στα $O_r(\mathrm{T})$ και $O_{r+1}(T)$.

□

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε έναν κλειστό τύπο για τον συντελεστή του $s_{\langle 1^d \rangle}(x)$. Παρατηρούμε ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα P-ταμπλώ σχήματος $\rangle 1^d \langle$ και τις μεταθέσεις του $[d]$ χωρίς P-καθόδους, η οποία διατηρεί τις P-αντιστροφές, άρα ο συντελεστής αυτός είναι ίσος με $\sum_{w \in D(P)} t^{\mathrm{inv}_G(w)}$.

Θεώρημα 4.5.3. Έστω $m = (m_1, \cdots, m_{d-1})$ ακολουθία Hessenberg, $P = P(m)$ και $G = G(m)$. Τότε

$$\sum_{w \in D(P)} t^{\mathrm{inv}_G(w)} = \prod_{i=1}^{d-1} [1 + m_i - i]_t$$

Άρα είναι θετικό, παλινδρομικό και μονότροπο πολυώνυμο με κέντρο συμμετρίας $\frac{q}{2}$
Σχέδιο απόδειξης
Δείχνουμε ότι $\sum_{w \in D(P)} t^{\mathrm{inv}_G(w)} = \prod_{i=1}^{d-1} [1 + a_i]_t$, όπου $a_i = \#\{\{i, j\} \in E(G) : j > i\}$.
Έστω $w \in D(P)$ και $k \in [d]$. Για $i = 1, 2, \cdots, d$ έστω w^i η επαγόμενη μετάθεση του $\{i, i+1, \cdots, d\}$ που προκύπτει από την w. Δείχνουμε με επαγωγή στο i ότι η w^i δεν έχει P-καθόδους:

- $w^1 = w$
- Έστω $k = 1, \cdots, d-1$ και ότι η w^k δεν έχει P-καθόδους. Θα δείξουμε ότι ούτε η w^{k+1} έχει P-καθόδους. Έστω $w^k = (\cdots x\, k\, y \cdots)$, για κάποια $x, y \in \{k+1, \cdots, d\}$ με $x \parallel_P k$ και $w^{k+1} = (\cdots x\, y \cdots)$. Υποθέτουμε ότι η αφαίρεση του k δημιουργεί P-κάθοδο, δηλαδή $x >_P y$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:
  - $k \parallel_P y$
    Αφού το P είναι φυσική unit interval διάταξη έπεται ότι $x > k > y$. Άτοπο.
  - $k <_P y$
    Τότε $k <_P x$. Άτοπο.

Για $i = 1, \cdots, d-1$ θέτουμε $A_i = \{j > i : \{i, j\} \in E(G)\}$.
Θα ορίσουμε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση
$\varphi : D(P) \to \{0, 1, \cdots, a_1\} \times \{0, 1, \cdots, a_2\} \times \cdots \{0, 1, \cdots, a_{d-1}\}$, τέτοια ώστε αν $\varphi(w) = (l_1, \cdots, l_{d-1})$ να ισχύει $\mathrm{inv}_G(w) = l_1 + \cdots + l_{d-1}$ οπότε έπεται το ζητούμενο.
Έστω $w \in D(P)$. Για $i = 1, 2, \cdots, d-1$ συμβολίζουμε
$\varphi_i(w) = \#\{j = i+1, \cdots, d : \{i, j\} \in E(G)$ και το j εμφανίζεται αριστέρα του i στην $w^i\}$. Τότε $\varphi_i(w) \in \{0, 1, \cdots, a_i\}$. Θέτουμε $\varphi(w) = (\varphi_1(w), \cdots, \varphi_{k-1}(w))$.
Αντίστροφα έστω $(l_1, l_2, \cdots, l_{d-1}) \in \{0, 1, \cdots, a_1\} \times \{0, 1, \cdots, a_2\} \times \cdots \{0, 1, \cdots, a_{d-1}\}$.
Βρίσκουμε την $w \in N(P)$ για την οποία $\varphi(w) = (l_1, l_2, \cdots, l_{d-1})$ ορίζοντας τις $w^d, w^{d-1}, \cdots$ ως εξής:

- Θέτουμε $w^d = d$

- Έστω τώρα $k = 1, \cdots d-1$ και ότι έχουμε βρει την w^{k+1}. Η w^k δεν έχει P-καθόδους, άρα προκύπτει τοποθετώντας το k στην w^{k+1} αμέσως μετά το l_k-οστό από αριστερά στοιχείο του A_k.

□

Στην περίπτωση που το P είναι αντιαλυσίδα στο $[d]$ προκύπτει η γνωστή σχέση $\sum_{w \in \mathfrak{S}_d} t^{\mathrm{inv}(w)} = (1+t)(1+t+t^2)\cdots(1+t+\cdots+t^{d-1})$.
Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τα παραπάνω για να δείξουμε την e-θετικότητα και μονοτροπία μιας οικογένειας φυσικών unit interval γραφημάτων.

Θεώρημα 4.5.4. Έστω $m = (m_1, m_2, \cdots, m_{d-1})$ με $m_1 \geq 2$ και $m_3 = d$ και

$$X_{G(m)} = \sum_{\lambda \vdash d} B_\lambda(t) s_\lambda(x) = \sum_{\lambda \vdash d} C_\lambda(t) e_\lambda(x)$$

. Τότε:

1. Αν $\lambda \notin \{\langle 1^d \rangle, \langle 1^{d-2}, 2 \rangle, \langle 1^{d-4}, 2^2 \rangle\}$ τότε $B_\lambda(t) = 0$
2. Αν $\lambda \notin \{(d), (d-1,1), (d-2,2)\}$ τότε $C_\lambda(t) = 0$
3. $B_{\langle 1^d \rangle}(t) = [m_1]_t [m_2 - 1]_t [d-2]_t!$
4. $C_{(d)}(t) = [d]_t [d-3]_t! [m_1 - 1]_t [m_2 - 2]_t$
5. $B_{\langle 1^{d-2}, 2 \rangle}(t) = [d-3]_t! D(t)$
6. $C_{(d-2,2)}(t) = B_{\langle 1^{d-4}, 2^2 \rangle} = [d-4]_t! [2]_t [d-m_2]_t [d-m_1-1]_t t^{m_1+m_2-4}$
7. $C_{(d-1,1)}(t) = [d-4]_t! E(t)$

όπου $D(t) = t^{m_1-1}[d-m_1]_t[m_2-2]_t + t^{m_2-2}[d-m_2]_t[m_1]_t$ και
$E(t) = t^{m_1-1}[d-3]_t[d-m_1]_t[m_2-2]_t + t^{m_2-2}[d-1]_t[d-m_2]_t[m_1-2]_t$
Άρα το $X_G(x,t)$ είναι e-θετικό και e-μονότροπο.
Απόδειξη
Έστω $P = P(m)$. Τα σύνολα $\{1,2\}$ και $\{3, \cdots, d\}$ είναι αντιαλυσίδες του P και ισχύουν $1 < i$ για $i = m_1+1, \cdots, d$ και $2 < j$, για $j = m_2+1, \cdots, d$. Το $\mathrm{inc}(P)$ είναι ένωση δύο κλικών στα σύνολα $\{1,2\}$ και $\{3, \cdots, d\}$, με επιπλέον ακμές τις $\{1,3\} \cdots, \{1, m_1\}$ και $\{2,3\}, \cdots, \{2, m_2\}$.

1. Γνωρίζουμε ότι $B_\lambda(t) = \sum_{T \in T_{P,\lambda}} t^{\mathrm{inv}_G(T)}$, όπου $T_{P,\lambda}$ το σύνολο των P-ταμπλώ σχήματος λ. Αν υπάρχει $T \in T_{P,\lambda}$ θα υπάρχει διαμέριση τύπου λ του P σε αλυσίδες. Οι μόνες πιθανές τέτοιες διαμερίσεις του d είναι οι $\langle 1^d \rangle, \langle 1^{d-2}, 2 \rangle, \langle 1^{d-4}, 2^2 \rangle$, άρα $X_G(x,t) = B_{\langle 1^d \rangle}(t) s_{\langle 1^d \rangle}(x) + B_{\langle 1^{d-2}, 2 \rangle}(t) s_{\langle 1^{d-2}, 2 \rangle}(x) + B_{\langle 1^{d-4}, 2^2 \rangle}(t) s_{\langle 1^{d-4}, 2^2 \rangle}(x)$

2. Λόγω των σχέσεων
   $s_{\langle 1^d \rangle} = e_{(d)}$
   $s_{\langle 1^{d-2},2 \rangle} = e_{(d-1,1)} - e_{(d)}$
   $s_{\langle 1^{d-4},2^2 \rangle} = e_{(d-2,2)} - e_{(d-1,1)}$
   έχουμε

   $$X_G(x,t) = (B_{\langle 1^d \rangle} - B_{\langle 1^{d-2},2 \rangle})e_{(d)} + (B_{\langle 1^{d-2},2 \rangle} - B_{\langle 1^{d-4},2^2 \rangle})e_{(d-1,1)} + B_{\langle 1^{d-4},2^2 \rangle}e_{(d-2,2)}$$

   άρα $C_{(d)}(t) = B_{\langle 1^d \rangle}(t) - B_{\langle 1^{d-2},2 \rangle}(t)$, $C_{(d-1,1)}(t) = B_{\langle 1^{d-2},2 \rangle}(t) - B_{\langle 1^{d-4},2^2 \rangle}(t)$
   $C_{(d-2,2)}(t) = B_{\langle 1^{d-4},2 \rangle}(t)$ και αν $\lambda \notin \{(d),(d-1,1),(d-2,2)\}$ τότε $C_\lambda(t) = 0$.

3. Από το θεώρημα (4.5.3) έπεται ότι
   $B_{\langle 1^d \rangle}(t) = \prod_{i=1}^{d-1}[1+m_i-i]_t = [m_1]_t[m_2-1]_t[d-2]_t[d-3]_t \cdots [2]_t = [m_1]_t[m_2-1]_t[d-2]_t!.$

4. Από το θεώρημα (4.4.7) $C_{(d)}(t) = [d]_t \prod_{i=2}^{d}[b_i]_t$ όπου $b_i = \#\{\{i,j\} \in E(G) : j < i\}$.

   $$b_i = \begin{cases} 1, \text{αν } i = 2 \\ i-1, \text{αν } i = 3, \cdots, m_1 \\ i-2, \text{αν } i = m_1+1, \cdots, m_2 \\ i-3, \text{αν } i = m_2+1, \cdots, d \end{cases}$$

   άρα $C_{(d)}(t) = [d]_t[1]_t[2] \cdots [m_1-1]_t[m_1-1]_t \cdots [m_2-2]_t[m_2-2]_t \cdots [d-3]_t =$
   $= [d-3]_t![d]_t[m_1-1]_t[m_2-2]_t$

5. $B_{\langle 1^{d-2},2 \rangle}(t) = B_{\langle 1^d \rangle}(t) - C_{(d)}(t)$

6. $C_{d-2,2}(t) = B_{\langle 1^{d-4},2^2 \rangle}(t) = \sum_T t^{\mathrm{inv}_G(T)}$
   όπου το T διατρέχει τα P-ταμπλώ σχήματος $(2,2,1,\cdots,1)$.
   Για $i,j \in [d]$ έστω $\mathrm{T}_{i,j}$ το σύνολο των ταμπλώ σχήματος $(2,2,1,\cdots,1)$ όπου τα $1,i$ καταλαμβάνουν την πρώτη γραμμή και τα $2,j$ την δεύτερη και $\mathrm{T}^*_{j,i}$ το σύνολο των ταμπλώ σχήματος $(2,2,1,\cdots,1)$ όπου τα $2,j$ καταλαμβάνουν την πρώτη γραμμή και τα $1,i$ την δεύτερη. Τότε τα αθροίσματα $\sum_{T \in T_{i,j}} t^{\mathrm{inv}_G(T)}$ και $\sum_{T \in T^*_{j,i}} t^{\mathrm{inv}_G(T)}$ υπολογίζονται εύκολα, γιατί τα υπόλοιπα $d-4$ στοιχεία του $[d]$, δηλαδή εκτός από τα $1,2,i,j$ μπορούν να τοποθετηθούν σε οποιαδήποτε σειρά. Άρα παίρνουμε κάθε φορά το πολυώνυμο $[d-4]_t!$ πολλαπλασιασμένο με κάποια δύναμη του t που εξαρτάται από τις τιμές των i,j. Τέλος
   $B_{\langle 1^{d-4},2^2 \rangle}(t) = \sum_{i,j} \left(\sum_{T \in T_{i,j}} t^{\mathrm{inv}_G(T)} + \sum_{T \in T^*_{j,i}} t^{\mathrm{inv}_G(T)} \right)$

7. $C_{(d-1,1)}(t) = B_{\langle 1^{d-2}2 \rangle} - B_{\langle 1^{d-4}2^2 \rangle}$

$\square$

Πόρισμα 4.5.5.

- $X_{G_{d,d-2}} = [d-2]_t![d-1]_t^2 s_{\langle 1^d \rangle} + [d-2]_t!t^{d-2} s_{\langle 1^{d-2},2 \rangle}$
- $X_{G_{d,d-2}} = [d-2]_t![d-2]_t[d]_t e_{(d)} + [d-2]_t!t^{d-2} e_{(d-1,1)}$
- $X_{G_{d,d-3}} = [d-2]_t^2[d-2]_t! s_{\langle 1^d \rangle} + [d-3]_t!t^{d-3}([2]_t[d-3]_t + [d-2]_t) s_{\langle 1^{d-2},2 \rangle} + [d-4]_t![2]_t t^{2d-7} s_{\langle 1^{d-4},2^2 \rangle}$
- $X_{G_{d,d-3}} = [d]_t[d-3]_t^2[d-3]_t! e_{(d)} + [d-4]_t!t^{d-3}([2]_t[d-3]_t! + [d-1]_t[d-4]_t) e_{(d-1,1)} + [d-4]_t![2]_t t^{2d-7} e_{(d-2,2)}$

4.6 Η Αναπαράσταση της Tymozcko

Τέλος, Θα δούμε μια πολύ ενδιαφέρουσα σύνδεση της θεωρίας των quasi-συμμετρικών συναρτήσεων με την αλγεβρική γεωμετρία. Οι Shareshian και Wachs μελέτησαν τη σχέση των quasi-συμμετρικών συναρτήσεων για φυσικά unit interval γραφήματα με τις αναπαραστάσεις της συμμετρικής ομάδας πάνω στην συνομολογία των κανονικών ημιαπλών ποικιλοτήτων Hessenberg. Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε συνοπτικά αυτή την σχέση, χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες που αφορούν τους κλάδους της αλγεβρικής τοπολογίας και γεωμετρίας. Για περισσότερες πληροφορίες για αυτά τα θέματα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [16],[27],[31],[32]. Όπως αποδείξαμε, όταν το G είναι φυσικό unit interval γράφημα έχουμε

$$\omega X_G(x,t) = \sum_{j=0}^{\#E(G)} f_j(x) t^j$$

όπου κάθε $f_j(x)$ είναι Schur-θετική ομογενής συμμετρική συνάρτηση βαθμού d. Επομένως κάθε $f_j(x)$ είναι ίση με την χαρακτηριστική Frobenius κάποιας αναπαράστασης της $\mathfrak{S}_d$. Οι Shareshian και Wachs διατύπωσαν το 2012 την ακόλουθη εικασία, η οποία αποδείχτηκε από τους Brosnan και Chow το 2015[4] και τον Guay-Paquet το 2016[13], με τη χρήση διαφορετικών μεθόδων.

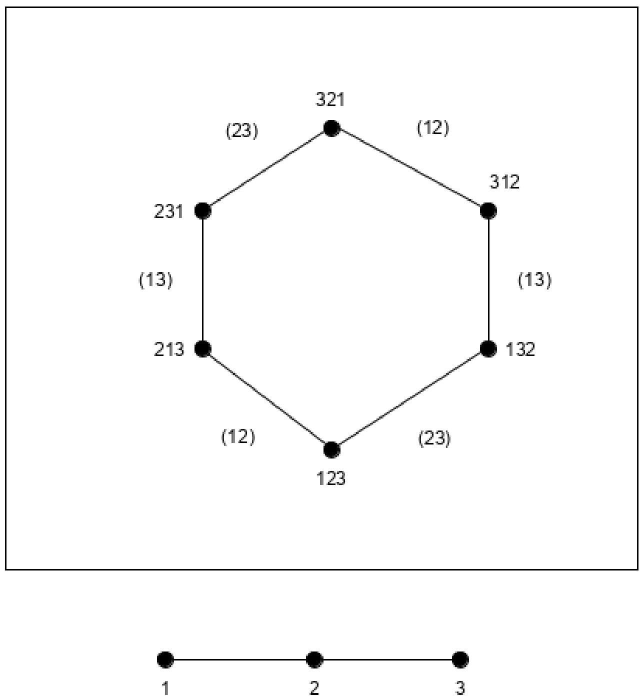
Θεώρημα 4.6.1. Έστω $P = P(m)$ και $G = G(m)$ όπου $m = (m_1, m_2, \cdots, m_{d-1})$ είναι ακολουθία Hessenberg και

- H_G η ποικιλότητα Hessenberg που αντιστοιχεί στην m
- $H^*(H_G) = \oplus_{j \geq 0} H^j(H_G)$ ο διαβαθμισμένος δακτύλιος συνομολογίας της H_G
- $\mathrm{ch}H^{2j}(H_G)$ η χαρακτηριστική Frobenius για την αναπαράσταση της Tymoczko της $\mathfrak{S}_d$ πάνω στην $H^{2j}(H_G)$.

Τότε

$$\omega X_G(x,t) = \sum_{j=0}^{\#E(G)} \mathrm{ch}H^{2j}(H_G) t^j$$

Η Tymoczko χρησιμοποίησε τη θεωρία GKM για να ορίσει την προαναφερθείσα αναπαράσταση της συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_d$ πάνω σε κάθε συνομολογία $H^{2j}(H_G)$. Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε συνδυαστικά την κατασκευή της equivariant συνομολογίας $H_T^*(H_G)$ και την αναπαράσταση της Tymoczko.
Για γράφημα G όπως πριν θεωρούμε το γράφημα $\Gamma(G)$ (moment graph) με σύνολο κορυφών τα στοιχεία της συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_d$ και σύνολο ακμών $\{\{w, w(i\,j)\} : \{i,j\} \in E(G)\}$.
Ορίζουμε συνάρτηση $\varepsilon : E(\Gamma(G)) \to \mathfrak{S}_d$ ως εξής:
Έστω $\{w, \sigma\}$ ακμή του $\Gamma(G)$. Τότε υπάρχει μοναδική αντιμετάθεση $(a\,b) \in \mathfrak{S}_d$ τέτοια ώστε $\sigma = (a\,b)w$. Τότε θέτουμε $\varepsilon(\{w,\sigma\}) = (a\,b)$.



Σχήμα 4.1: το γράφημα $\Gamma(G)$ για $m = (2,3)$

Θεωρούμε την $\mathbb{C}$-άλγεβρα $R_d = \prod_{w \in \mathfrak{S}_d} \mathbb{C}[t_1, \cdots, t_d]$.
Έστω $p \in R_d$. Θα λέμε ότι το p ικανοποιεί την ιδιότητα των ακμών αν ισχύει το εξής:
Για κάθε ακμή $\{w, \sigma\} \in E(\Gamma(G))$ με επιγραφή $(a\,b)$ το πολυώνυμο
$p_w(t_1, t_2, \cdots, t_d) - p_\sigma(t_1, t_2, \cdots, t_d)$ είναι πολλαπλάσιο του $t_a - t_b$.

Θεώρημα 4.6.2. Η equivariant συνομολογία $H_T^*(H_G)$ είναι ισόμορφη με τον υποδακτύλιο του R_d που αποτελείται από όλα τα p που ικανοποιούν την ιδιότητα των ακμών

Θεωρούμε αναπαράσταση της $\mathfrak{S}_d$ πάνω στην $H_T^*(H_G)$ ως εξής:
Έστω $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ και $p = (p_w(t_1, \cdots, t_d))_{w \in \mathfrak{S}_d}$
Θέτουμε $\sigma \cdot p = q = (q_w(t_1, \cdots, t_d))_{w \in \mathfrak{S}_d}$ με $q_w = p_{\sigma^{-1}w}(t_{\sigma_1}, \cdots, t_{\sigma_d})$. Η αναπαράσταση είναι καλά ορισμένη.

Έστω $M = \langle t_1, t_2, \cdots, t_d \rangle$, δηλαδή το ιδεώδες του δακτυλίου των πολυωνύμων $\mathbb{C}[t_1, t_2, \cdots, t_d]$ που παράγεται από τα μονώνυμα $t_1, t_2, \cdots, t_d$. Ο υπόχωρος $M \cdot H_T^*(H_G)$ είναι $\mathfrak{S}_d$-αναλλοίωτος άρα η αναπαράσταση της $\mathfrak{S}_d$ στην $H_T^*(H_G)$ επάγει αναπαράσταση της $\mathfrak{S}_d$ στον χώρο πηλίκο $H_T^*(H_G)/M \cdot H_T^*(H_G)$
Τότε η συνήθης συνομολογία $H^*(H_G)$ είναι ισόμορφη με το πηλίκο $H_T^*(H_G)/M \cdot H_T^*(H_G)$ και έτσι έχουμε δράση της συμμετρικής ομάδας στον διαβαθμισμένο δακτύλιο συνομολογίας $H^*(H_G) = \oplus_{j \geq 0} H^j(H_G)$, τέτοια ώστε κάθε $H^j(H_G)$ είναι $\mathfrak{S}_d$-αναλλοίωτος.
Η απόδειξη της εικασίας των Shareshian και Wachs οδήγησε στα παρακάτω αποτελέσματα:
Έστω G φυσικό unit interval γράφημα στο $[d]$ και $\lambda \vdash d$.

- Η πολλαπλότητα της ανάγωγης αναπαράστασης S^λ στην αναπαράσταση της Tymotzco στην $H^{2j}(H_G)$, ισούται με
$\#\{T \in T_{P,\lambda'} : \mathrm{inv}_G(T) = j\}$

- Ο χαρακτήρας της αναπαράστασης Tymotzco στην $H^{2j}(H_G)$, υπολογισμένος σε κάποια μετάθεση τύπου λ ισούται με
$\#\{w \in N_{P,\lambda} : \mathrm{inv}_G(w) = j\}$

- Το $X_{\mathrm{inc}(P)}$ είναι Schur-μονότροπο. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει από τον συνδυασμό του θεωρήματος (4.6.1) με το θεώρημα hard-lefschetz.[23]

- Από το προηγούμενο αποτέλεσμα έπεται ότι τα γενικευμένα q-πολυώνυμα Euler είναι q-μονότροπα.[23]

Με βάση τα προηγούμενα η εικασία Shareshian-Wachs μπορεί να αντικατασταθεί από την ακόλουθη.

Εικασία 4.6.3. Η αναπαράσταση Tymotzco της $\mathfrak{S}_d$ στο $H^{2j}(H_G)$ είναι αναπαράσταση μεταθέσεων για την οποία κάθε σταθεροποιούσα υποομάδα είναι υποομάδα Young.

Βιβλιογραφία

[1] R.M. Adin και Y. Roichman. “Matrices,Characters and Descents”. Στο: *Linear Algebra and its Applications* 469 (2015), σσ. 381–418.

[2] P. Alexandersson και G. Panova. “LLT polynomials, chromatic quasisymmetric functions and graphs with cycles”. Στο: *Discrete Mathematics* 341 (2018), σσ. 3453–3482.

[3] C.A. Athanasiadis. “Power sum expansion of chromatic quasisymmetric functions”. Στο: *The electronic journal of combinatorics* 22(2) (2015), σσ. 1–9.

[4] P. Brosnan και T.Y. Chow. “Unit Interval Orders and the Dot Action on the Cohomology of Regular Semisimple Hessenberg Varieties”. Στο: *Advances in Mathematics* 329 (2015), σσ. 955–1001.

[5] L. Carlitz, R. Scoville και T. Vaughan. “Enumeration of pairs of sequences by rises, falls and levels”. Στο: *manuscripta mathematica* 19 (1976), σσ. 211–243.

[6] S. Cho και J. Huh. “On e-positivity and e-unimodality of chromatic quasisymmetric functions”. Στο: *arXiv:1711.07152* (2017).

[7] S. Dahlberb. “Triangular Ladders Pd,2 are e-positive”. Στο: *arXiv:1811.04885v2* (2019).

[8] B. Ellzey. “A directed graph generalization of chromatic quasisymmetric functions”. Στο: *arXiv:1709.00454* (2017).

[9] B. Ellzey και M.L. Wachs. “On Enumerators of Smirnov Words by Descents and Cyclic Descents”. Στο: *arXiv:1901.01591v2* (2019).

[10] V. Gasharov. “Incomparabillity Graphs of (3+1)-free posets are s-positive”. Στο: *Discrete Mathematics* 157 (1995), σσ. 193–197.

[11] D.D. Gebhard και S B.E. Sagan. “A chromatic symmetric function in noncommuting variables”. Στο: *Journal of Algebraic Combinatorics* 13 (2001), σσ. 227–255.

[12] M. Guay-Paquet. “A Modular Law for the Chromatic Symmetric Functions of (3+1)-free posets”. Στο: *arXiv:1306.2400* (2013).

[13] M. Guay-Paquet. “A second proof of the Shareshian-Wachs conjecture, by way of a new Hopf Algebra”. Στο: *arXiv:1601.05498* (2016).

[14] M. Guay-Paquet, A.H. Morales και E. Rowland. “Stracture and Enumeration of (3+1)-free posets”. Στο: *Annals of Combinatorics* 18 (2014), σσ. 645–674.

[15] M. Haiman. “Heeke algebra characters and immanant conjectures”. Στο: *J. Amer. Math. Soc.* 6 (1993), σσ. 569–595.

[16] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[17] J. Huryn. "A few more trees chromatic symmetric functions can distinguish". Στο: *arXiv:1901.04034v4* (2019).

[18] J.L. Martin, M Morin και J.D. Wagner. "On distinguishing trees by their chromatic symmetric functions". Στο: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 115, Issue 2 (2008), σσ. 237–253.

[19] Y. Roichman. "A Recursive Rule for Kazhdan-Lusztig Characters". Στο: *Advances in Mathematics* 129 (1997), σσ. 25–45.

[20] M.H. Rosas και B.E. Sagan. "Symmetric Functions in Noncommuting Variables". Στο: *Transactions of the American Mathematical Society* 358 (2006), σσ. 215–232.

[21] A. Rum. "An Elementary Proof of Roichman's Rule for Irreducible Characters of Iwahori-Hecke Algebras of Type A". Στο: *Progress in Mathematics* 161 (1998), σσ. 335–342.

[22] D. Scott και P. Suppes. "Foundational Aspects of Theorie of Measurement". Στο: *The Journal of Symbolic Logic* 23(2) (1958), σσ. 113–128.

[23] J. Shareshian και M.L. Wachs. "Chromatic Quasisymmetric Functions". Στο: *Advances in Mathematics* 295 (2014), σσ. 497–551.

[24] J. Shareshian και M.L. Wachs. "Chromatic quasisymmetric functions and Hessenberg varieties". Στο: *Configuration Spaces* 295 (2012), σσ. 433–460.

[25] R.P. Stanley. "A Symmetric Function Generalization of the Chromatic Polynomial of a Graph". Στο: *Advances in Mathematics* 111 (1995), σσ. 166–194.

[26] R.P. Stanley. "Acyclic orientations of graphs". Στο: *Discrete Mathematics* 5 (1973), σσ. 171–178.

[27] R.P. Stanley. "Combinatorial Applications of the Hard Lefschetz Theorem". Στο: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (1983), σσ. 447–453.

[28] R.P. Stanley. *Enumerative Combinatorics,vol.1.* Cambridge University Press, 2011.

[29] R.P. Stanley. *Enumerative Combinatorics,vol.2.* Cambridge University Press, 1999.

[30] R.P. Stanley. "Graph Colorings and Related Symmetric Functions:Ideas and Applications". Στο: *Discrete Mathematics* 193 (1995), σσ. 267–286.

[31] J. Tymoczko. "An introduction to equivariant cohomology and homology, following Goresky, Kottwitz, and MacPherson, Snowbird lectures in algebraic geometry". Στο: *Contemp Math.* 388 (2005), σσ. 169–188.

[32] J. Tymoczko. "Permutation representations on Schubert varieties". Στο: *American Journal of Mathematics* (2008), σσ. 1171–1194.

[33] D.B. West. *Introduction to Graph Theory.* Pearson, 2002.

[34] Χ.Α. Αθανασιάδης. *Αλγεβρική και Απαριθμητική Συνδυαστική, Τόμος Α.* 2016.

[35] Χ.Α. Αθανασιάδης. *Διακριτά Μαθηματικά, Σημειώσεις.* 2018.