

Θεωρία Galois
Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2011

1. Έστω υπόσωμα K του σώματος \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών και έστω $\alpha = i\sqrt{5}$.
- (α) (5 μονάδες) Υπολογίστε το βαθμό $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
 - (β) (5 μονάδες) Υπολογίστε το ανάγωγο πολυώνυμο του $\beta = 2\alpha - 1$ επί του \mathbb{Q} .
 - (γ) (5 μονάδες) Αν $[K : \mathbb{Q}] = 13$, δείξτε ότι $\alpha \notin K$.
 - (δ) (5 μονάδες) Αν $\alpha \in K$ και $[K : \mathbb{Q}] = 12$, υπολογίστε το βαθμό $[K : \mathbb{Q}(\alpha)]$.
 - (ε) (5 μονάδες) Αποφανθείτε αν υπάρχει επέκταση Galois K του \mathbb{Q} , τέτοια ώστε $\alpha \in K$ και $[K : \mathbb{Q}] = 12$.

2. Έστω σώμα K με q στοιχεία, όπου $20 \leq q \leq 28$, και έστω K^\times η πολλαπλασιαστική ομάδα $K \setminus \{0\}$ του K .

- (α) (5 μονάδες) Ποιες είναι οι τιμές που μπορεί να λάβει ο q ;
- (β) (5 μονάδες) Ποια είναι η μέγιστη δυνατή τάξη ενός στοιχείου της K^\times ;
- (γ) (5 μονάδες) Υπολογίστε το άθροισμα των στοιχείων του K .
- (δ) (5 μονάδες) Ποιες είναι οι τιμές που μπορεί να λάβει ο q αν το K περιέχει υπόσωμα με πλήθος στοιχείων μεγαλύτερο του 4 και μικρότερο του 10;

3. Έστω $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$, όπου $\sqrt[4]{2}$ είναι η πραγματική τέταρτη ρίζα του 2.

- (α) (5 μονάδες) Υπολογίστε το βαθμό επέκτασης $[K : \mathbb{Q}]$.
- (β) (5 μονάδες) Είναι η K/\mathbb{Q} επέκταση Galois;
- (γ) (5 μονάδες) Είναι η ομάδα $G(K/\mathbb{Q})$ κυκλική;

4. (10 μονάδες) Δίνεται σώμα F χαρακτηριστικής μηδέν και επέκταση Galois K του F , η ομάδα Galois της οποίας είναι ισόμορφη με τη συμμετρική ομάδα S_3 . Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{F \subseteq L \subseteq K} [L : F]^2,$$

όπου το L διατρέχει τα ενδιάμεσα σώματα της επέκτασης K/F . Ποιος είναι ο βαθμός της επέκτασης K/F ;

5. Δίνονται οι πρωταρχικές ρίζες της μονάδος $\zeta = e^{2\pi i/7}$ και $\eta = e^{2\pi i/14}$.

- (α) (5 μονάδες) Υπολογίστε το ανάγωγο πολυώνυμο του η επί του \mathbb{Q} .
- (β) (5 μονάδες) Υπολογίστε το ανάγωγο πολυώνυμο του η επί του $\mathbb{Q}(\zeta)$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 24/6/2011 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία