

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2018
Ασκήσεις #1

1. Δείξτε

$$\sum_{k=1}^n \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \frac{n(n-1)}{n+1}$$

για $n \in \mathbb{N}$.

2. Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους $2^{n-1} \geq n^3$. Πότε ισχύει η ισότητα;

3. Έστω η ακολουθία Fibonacci (F_n) , με $F_1 = F_2 = 1$ και $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ για $n \geq 2$. Δείξτε ότι το F_n διαιρεί το F_{2n} για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

4. Θέτουμε $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, υπολογίστε (όσο το δυνατόν ακριβέστερα) το πλήθος των απεικονίσεων $f : S \rightarrow S$ με την εξής ιδιότητα:

- (α) Για κάθε $y \in S$ υπάρχει $x \in S$ με $f(x) = y$.
- (β) Για κάθε $y \in \{2, 4, 6\}$ υπάρχουν δύο $x \in S$ με $f(x) = y$.
- (γ) Για κάθε $y \in \{3, 6\}$ υπάρχουν τρία $x \in S$ με $f(x) = y$.

5. Δείξτε ότι $k \binom{n}{k} = (n-k+1) \binom{n}{k-1}$ για ακεραίους $1 \leq k \leq n$ ως εξής:

- (α) Χρησιμοποιώντας το γνωστό τύπο για τους διωνυμικούς συντελεστές.
- (β) Απαριθμώντας τα στοιχεία ενός συνόλου με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Έως Τετάρτη 28 Φεβρουαρίου

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2018
Ασκήσεις #2

6. Θεωρούμε τις λέξεις με πέντε γράμματα από το αλφάβητο $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$, όπως, για παράδειγμα, τις BAAΔB και ΓΑΔΓB. Δώστε όσο το δυνατόν ακριβέστερη απάντηση στα ακόλουθα ερωτήματα:

- (α) Πόσες από αυτές έχουν τουλάχιστον ένα A;
- (β) Πόσες από αυτές έχουν το πολύ ένα A;
- (γ) Πόσες από αυτές έχουν τουλάχιστον ένα A, τουλάχιστον ένα B και τουλάχιστον ένα Γ;

7. Επιλέγουμε ένα υποσύνολο του $\{1, 2, \dots, 14\}$ με τέσσερα στοιχεία. Δώστε όσο το δυνατόν ακριβέστερη απάντηση στα ακόλουθα ερωτήματα:

- (α) Πόσα από αυτά τα υποσύνολα περιέχουν ακριβώς έναν άρτιο αριθμό;
- (β) Πόσα από αυτά τα υποσύνολα έχουν άθροισμα στοιχείων άρτιο αριθμό;

8. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

για κάθε θετικό ακέραιο n .

9. Τέσσερα ανδρόγυνα κάθονται γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι. Σε πόσες τέτοιες κυκλικές διατάξεις δεν υπάρχουν σύζυγοι που να κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο;

10. Δίνονται ακέραιοι $n, k \geq 3$ και κυρτό πολύγωνο Π με n κορυφές, έστω $1, 2, \dots, n$. Θεωρούμε τα κυρτά πολύγωνα Π' με k κορυφές που έχουν τις εξής ιδιότητες: (i) κάθε κορυφή του Π' είναι κορυφή του Π , και (ii) κάθε ακμή του Π' είναι διαγώνιος του Π .

- (α) Πόσα τέτοια πολύγωνα Π' περιέχουν την κορυφή 1;
- (β) Πόσα τέτοια πολύγωνα Π' υπάρχουν συνολικά;

Περιγράψτε τις απαντήσεις σας ως συναρτήσεις των n και k .

Έως Τετάρτη 14 Μαρτίου

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2018
Ασκήσεις #3

11. Θεωρούμε τετράγωνο T με πλευρά μήκους 2 στο επίπεδο. Πόσα το πολύ σημεία του T (στο σύνορο ή στο εσωτερικό του) μπορούν να επιλεγούν, έτσι ώστε οποιαδήποτε δύο από αυτά να απέχουν μεταξύ τους απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του $\sqrt{2}$;

12. Θεωρούμε το σύνολο $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Πόσες το πολύ 1-1 και επί απεικονίσεις από το X στον εαυτό του μπορούν να επιλεγούν, έτσι ώστε για οποιοδήποτε δύο από αυτές, έστω f και g , να ισχύει $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in X$;

13. Για τους αριθμούς Stirling του δεύτερου είδους, δείξτε τους τύπους:

$$(\alpha) S(n, 2) = 2^{n-1} - 1,$$

$$(\beta) S(n, n-1) = \binom{n}{2},$$

$$(\gamma) S(n, n-2) = \binom{n}{3} + \frac{1}{2} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2},$$

για $n \geq 2$.

14. Έστω ακέραιος $n \geq 3$. Δείξτε ότι μεταξύ $2n+1$ τυχαίων υποσυνόλων του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$ μπορούν να επιλεγούν τρία, έτσι ώστε κανένα από τα υποσύνολα αυτά να μην περιέχεται σε κάποιο από τα άλλα δύο.

15. Συμβολίζουμε με P το σύνολο των μη κενών υποσυνόλων του \mathbb{N} . Για $X, Y \in P$ γράφουμε $X \preceq Y$ αν $X = Y$, ή υπάρχει απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ η οποία είναι 1-1 αλλά όχι επί. Είναι η διμελής σχέση \preceq μερική διάταξη στο P ;

Έως Παρασκευή 30 Μαρτίου

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2018
Ασκήσεις #4

16. Για τους αριθμούς Stirling του δεύτερου είδους, δείξτε ότι

$$\binom{n}{k-1} \leq S(n, k) \leq \binom{n-1}{k-1} k^{n-k}$$

για ακεραίους $1 \leq k < n$.

17. Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που μπορεί να έχει ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο με οκτώ στοιχεία, μεταξύ των οποίων υπάρχει ένα ελάχιστο και τουλάχιστον τέσσερα μεγιστικά στοιχεία;

18. Για $n \geq 2$, θεωρούμε το σύνολο P_n των υποσυνόλων του $\{1, 2, \dots, n\}$ με ένα ή δύο στοιχεία, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού: $x \preceq y \Leftrightarrow x \subseteq y$.

(α) Υπολογίστε το ύψος του P_n .

(β) Υπολογίστε το πλάτος του P_n .

(γ) Πόσες αλυσίδες του P_n έχουν το μέγιστο δυνατό (ίσο με το ύψος του P_n) πλήθος στοιχείων;

19. Για ποιους θετικούς ακεραίους n υπάρχει απλό, συνεκτικό γράφημα με n κορυφές, καθεμιά από τις οποίες έχει βαθμό 3;

20. Συμβολίζουμε με $f(n)$ το πλήθος των κλάσεων ισομορφισμού απλών γραφημάτων με n κορυφές.

(α) Υπολογίστε το $f(n)$ για $n \leq 4$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί $a > 1$, b και c , για τους οποίους ισχύει $c \cdot a^n \leq f(n) \leq b^{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Έως Παρασκευή 27 Απριλίου

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2018
Ασκήσεις #5

- 21.** Δίνονται ακέραιοι $n \geq k \geq 3$. Πόσους κύκλους μήκους k περιέχει το πλήρες απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών $\{1, 2, \dots, n\}$;
- 22.** Ένα δένδρο έχει μία κορυφή βαθμού 5, δύο κορυφές βαθμού 4, τρεις κορυφές βαθμού 3 και τέσσερις κορυφές βαθμού 2, ενώ οι υπόλοιπες κορυφές του είναι φύλλα. Πόσες κορυφές έχει το δένδρο αυτό;
- 23.** Για κάθε ακέραιο $n \geq 3$, υπολογίστε το πλήθος των παραγόντων δένδρων του γραφήματος που προκύπτει διαγράφοντας μία από τις ακμές ενός πλήρους απλού γραφήματος με n κορυφές.
- 24.** Για απλό γράφημα $G = (V, E)$, συμβολίζουμε με $\bar{G} = (V, \bar{E})$ το απλό γράφημα στο ίδιο σύνολο κορυφών, με το συμπληρωματικό σύνολο ακμών $\bar{E} = \binom{V}{2} \setminus E$, και με $\chi(G)$ το χρωματικό αριθμό του G .
- (α) Ποιες είναι οι πιθανές τιμές του $\chi(G)$, αν το \bar{G} έχει δύο ακμές;
- (β) Αληθεύει ότι $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$ για κάθε απλό γράφημα G με n κορυφές;
- 25.** Ένα απλό γράφημα G έχει 50 κορυφές, όλες βαθμού δύο. Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος τέλειων ταιριασμάτων που μπορεί να έχει το G ;

Έως Παρασκευή 11 Μαΐου