

252 Διακριτά Μαθηματικά
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2026
Αθήνα 16/9/2026

Η εξέταση αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας σύντομα την απάντησή σας. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το μέρος Α είναι οι 6 μονάδες.

A1. Αν $a_0 = 1$ και $a_n = \frac{n+1}{n} a_{n-1}$ για $n \geq 1$, τότε το a_{50} είναι ίσο με

(α) $50/51$ (β) $51/50$ (γ) $51/2$ (δ) 50 (ε) 51 (στ) $51!$

A2. Το πλήθος των τετράδων (a, b, c, d) με $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $a + b + c = 6$ είναι ίσο με

(α) 28 (β) 84 (γ) 196 (δ) 252 (ε) 392 (στ) 588

A3. Το πλήθος των μονοπατιών στο $\mathbb{Z}^2$ με αρχή $(1, 1)$, πέρας $(4, 5)$ και βήματα της μορφής $(1, 0)$ ή $(0, 1)$ είναι ίσο με

(α) 28 (β) 35 (γ) 56 (δ) 70 (ε) 84 (στ) 126

A4. Το άθροισμα των συντελεστών του πολυνύμου $(2x - 1)^8$ είναι ίσο με

(α) μηδέν (β) -1 (γ) 1 (δ) -128 (ε) 128 (στ) 256

A5. Το ελάχιστο πλήθος κουτιών στα οποία μπορούμε να διανεμήσουμε 38 μπάλες έτσι ώστε κάθε κουτί να περιέχει το πολύ τέσσερις μπάλες είναι

(α) μικρότερο από 8 (β) ίσο με 8 (γ) ίσο με 9 (δ) ίσο με 10 (ε) ίσο με 11 (στ) μεγαλύτερο από 11

A6. Το πλήθος των διαμερίσεων π του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ για τις οποίες τα 4 και 5 ανήκουν σε διαφορετικά μέρη της π είναι

(α) μικρότερο από 38 (β) ίσο με 38 (γ) ίσο με 39 (δ) ίσο με 40 (ε) ίσο με 41 (στ) μεγαλύτερο από 41

A7. Αν P είναι το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση της διαιρετότητας, τότε το πλήθος των μεγιστικών στοιχείων του P είναι ίσο με

(α) 1 (β) 2 (γ) 3 (δ) 4 (ε) 5 (στ) 6

A8. Το μέγιστο πλήθος κορυφών βαθμού 2 που μπορεί να έχει ένα δένδρο με οκτώ κορυφές ισούται με

(α) 3 (β) 4 (γ) 5 (δ) 6 (ε) 7 (στ) 8

A9. Ένα απλό γράφημα G με έξι κορυφές δεν έχει κύκλους μήκους 3 ή 5. Ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του G ;

(α) 15 (β) 16 (γ) 17 (δ) 18 (ε) 19 (στ) 20

A10. Το ελάχιστο πλήθος ακμών που μπορεί να έχει ένα απλό συνεκτικό γράφημα με επτά κορυφές και χρωματικό αριθμό 3 είναι

(α) μικρότερο του 6 (β) ίσο με 6 (γ) ίσο με 7 (δ) ίσο με 8 (ε) μεγαλύτερο του 8 (στ) δεν ορίζεται

A11. Το ελάχιστο πλήθος κορυφών που μπορεί να έχει ένα μη επιπεδικό απλό γράφημα είναι ίσο με

(α) 1 (β) 2 (γ) 3 (δ) 4 (ε) 5 (στ) 6

A12. Ο συντελεστής του x^8 στην αντίστροφη της τυπικής δυναμοσειράς $(1-x) \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n = (1-x)/(1+x)$

(α) δεν ορίζεται (β) είναι ίσος με 1 (γ) είναι ίσος με -1 (δ) είναι ίσος με 2 (ε) είναι ίσος με -2 (στ) έχει απόλυτη τιμή μεγαλύτερη του 2

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται. Γράφете ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το μέρος Β είναι οι 4 μονάδες.

B1. Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{k=0}^n (n-k) \binom{n}{k}^2$ για $n \in \mathbb{N}$.

B2. Υπολογίστε το πλήθος των αναδιατάξεων $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$ του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ για τις οποίες $\sigma_2 \neq \sigma_1 + 1$ και $\sigma_2 < \sigma_3$.

B3. Έστω $\square_3$ το απλό γράφημα με κορυφές τις τριάδες (a_1, a_2, a_3) με $a_1, a_2, a_3 \in \{0, 1\}$ και ακμές τα ζεύγη των τριάδων που διαφέρουν σε μία μόνο συντεταγμένη. Υπολογίστε το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του $\square_3$.

B4. Για θετικούς ακεραίους n θέτουμε

$$f(n) = \sum_{r_1+r_2+\dots+r_k=n} (-1)^{n-k} (r_1+1)(r_2+1) \cdots (r_k+1),$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλες τις συνθέσεις $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ του n (με οποιοδήποτε πλήθος μερών). Για παράδειγμα, $f(1) = 2$ και $f(2) = 1$. Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 1} f(n)x^n$ και συναγάγετε ότι $f(n) = 0$ για κάθε $n \geq 3$.

Καλή Επιτυχία!