252 Διακριτά Μαθηματικά
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2023
Αθήνα 8/9/2023

Η εξέταση αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας σύντομα την απάντησή σας. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το μέρος Α είναι οι 6 μονάδες.

Α1. Το άθροισμα $\sum_{k=0}^{50}(2k+1)$ ισούται με

(α) 2399 (β) 2401 (γ) 2499 (δ) 2501 (ε) 2599 (στ) 2601

Α2. Το πλήθος των υποσυνόλων του συνόλου $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ τα οποία έχουν τρία ή τέσσερα στοιχεία είναι ίσο με

(α) 14 (β) 56 (γ) 70 (δ) 98 (ε) 126 (στ) 3920

Α3. Το πλήθος των τρόπων να τοποθετηθούν δύο όμοια πιόνια στα τετράγωνα μιας 5×5 σκακιέρας, έτσι ώστε τα πιόνια να βρίσκονται σε διαφορετικές γραμμές της σκακιέρας (αλλά πιθανώς στην ίδια στήλη), είναι ίσο με

(α) 100 (β) 125 (γ) 200 (δ) 250 (ε) 500 (στ) 1000

Α4. Τρεις φοιτητές και τέσσερις φοιτήτριες προσήλθαν για να εξεταστούν ταυτόχρονα σε ένα μάθημα, για το οποίο υπάρχουν πέντε διαθέσιμες αίθουσες εξέτασης. Με πόσους τρόπους μπορούν να διανεμηθούν οι φοιτητές και οι φοιτήτριες στις αίθουσες, αν δεν πρέπει να υπάρχουν άτομα του ίδιου φύλλου στην ίδια αίθουσα εξέτασης;

(α) 60 (β) 120 (γ) 180 (δ) 720 (ε) 3600 (στ) 7200

Α5. Ο συντελεστής του $x_1x_2x_3x_4x_5$ στο ανάπτυγμα του πολυωνύμου $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^5$ ισούται με

(α) 5 (β) 10 (γ) 20 (δ) 30 (ε) 60 (στ) 120

Α6. Το πλήθος των υποσυνόλων του συνόλου $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ τα οποία δεν είναι υποσύνολα κανενός από τα $\{1,2,3\}$, $\{3,4,5,6\}$ και $\{5,6,7,8\}$ είναι ίσο με

(α) 220 (β) 222 (γ) 224 (δ) 226 (ε) 228 (στ) 230

Α7. Το μέγιστο πλήθος ακεραίων που μπορούν να επιλεγούν μεταξύ των $1,2,3,\ldots,100$ έτσι ώστε η διαφορά μεταξύ δύο οποιωνδήποτε από τους ακεραίους που επιλέχθηκαν να διαιρείται με το 4 είναι ίσο με

(α) 25 (β) 35 (γ) 45 (δ) 55 (ε) 65 (στ) 75

Α8. Το ύψος του συνόλου $\{5,10,15,20,25,30,35\}$, μερικώς διατεταγμένου με τη σχέση της διαιρετότητας, είναι ίσο με (α) 1 (β) 2 (γ) 3 (δ) 4 (ε) 5 (στ) 6

A9. Το άθροισμα των βαθμών των (δεκαέξι) κορυφών ενός γραφήματος που προκύπτει από το 4×4 γράφημα Μανχάταν διαγράφοντας δύο από τις ακμές του

(α) ισούται με 22 (β) ισούται με 24 (γ) ισούται με 44 (δ) ισούται με 46 (ε) ισούται με 48 (στ) εξαρτάται από την επιλογή των ακμών που διαγράφονται

A10. Για ποιους θετικούς ακεραίους n υπάρχει δένδρο με n κορυφές το οποίο δεν είναι μονοπάτι και έχει τουλάχιστον ένα τέλειο ταίριασμα;

(α) για κανέναν (β) μόνο για τους άρτιους (γ) μόνο για τους περιττούς μεγαλύτερους του 1 (δ) μόνο για τους άρτιους μεγαλύτερους του 2 (ε) μόνο για τους άρτιους μεγαλύτερους του 4 (στ) μόνο για τους άρτιους μεγαλύτερους του 6

A11. Ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος που προκύπτει συστέλλοντας μια από τις ακμές του κύκλου μήκους 6

(α) ισούται με 1 (β) ισούται με 2 (γ) ισούται με 3 (δ) ισούται με 4 (ε) ισούται με 5 (στ) εξαρτάται από την επιλογή της ακμής που συστέλλεται

A12. Το ελάχιστο πλήθος κορυφών που μπορεί να έχει ένα απλό επιπεδικό γράφημα με δέκα ακμές είναι ίσο με

(α) 5 (β) 6 (γ) 7 (δ) 8 (ε) 9 (στ) 10

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το μέρος Β είναι οι 4 μονάδες.

B1. Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που ορίζεται αναδρομικά θέτοντας $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ και $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ για $n \geq 2$.

(α) Βρείτε έναν όσο το δυνατόν απλούστερο τύπο για το a_n.

(β) Βρείτε έναν όσο το δυνατόν απλούστερο τύπο για το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$, για $n \in \mathbb{N}$.

B2.

(α) Δείξτε ότι για κάθε $k \in \{2, 3, 5, 9\}$ υπάρχει δένδρο με δέκα κορυφές, καθεμιά από τις οποίες έχει βαθμό 1 ή k. Υπάρχουν άλλες τιμές του $k \geq 2$ με αυτή την ιδιότητα;

(β) Συμβολίζουμε με $f(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του $n \in \mathbb{N}$ με μέρη μεγαλύτερα του 1. Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} f(n) x^n = \prod_{i \geq 2} \frac{1}{1 - x^i},$$

όπου $f(0) := 1$.

Καλή Επιτυχία!