

Διακριτά Μαθηματικά
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2019

1. (30 μονάδες) Έστω $f(n)$ το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορεί να επιλεγεί πρώτα ένα υποσύνολο S του $\{1, 2, \dots, n\}$ και έπειτα ένα στοιχείο του S και ένα στοιχείο του $\{1, 2, \dots, n\}$ που δεν ανήκει στο S (όπου $f(0) = 0$).

(α) Υπολογίστε το $f(n)$ για $n = 11$.

(β) Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} f(n)x^n$ ως ρητή συνάρτηση του x .

(γ) Δείξτε ότι $\sum_{n \geq 0} f(n)x^n/n! = x^2 e^{2x}$.

2. (20 μονάδες) Θεωρούμε τις αναδιατάξεις του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$.

(α) Αν $n \neq 2$, δείξτε ότι το πλήθος των αναδιατάξεων αυτού του συνόλου χωρίς σταθερά σημεία είναι μικρότερο από το πλήθος των αναδιατάξεων του ίδιου συνόλου που έχουν τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.

(β) Αν ο n είναι περιττός, δείξτε ότι το πλήθος των αναδιατάξεων του $\{1, 2, \dots, n\}$ χωρίς σταθερά σημεία είναι μικρότερο από το πλήθος των αναδιατάξεων του ίδιου συνόλου που έχουν ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

3. (10 μονάδες) Δίνεται σύνολο S που αποτελείται από 28 ακεραίους αριθμούς. Αν δεν υπάρχουν τρία στοιχεία a, b, c του S για τα οποία οι διαφορές $a - b$ και $b - c$ διαιρούνται με το 17, δείξτε ότι υπάρχουν τέσσερα στοιχεία του S το άθροισμα των οποίων διαιρείται με το 17.

4. (30 μονάδες) Έστω ακέραιος $n \geq 3$ και έστω \mathcal{G}_n το σύνολο των απλών γραφημάτων με κορυφές $1, 2, \dots, n$, καθεμιά από τις οποίες έχει βαθμό 2.

(α) Δείξτε ότι ένα γράφημα $G \in \mathcal{G}_n$ είναι διμερές αν και μόνο αν έχει τέλει ταίριασμα.

(β) Για τις διάφορες τιμές του $n \geq 3$, βρείτε το μέγιστο χρωματικό αριθμό που μπορεί να έχει ένα γράφημα που ανήκει στο \mathcal{G}_n .

(γ) Για τις διάφορες τιμές του $n \geq 3$, βρείτε το ελάχιστο πλήθος παραγόντων δασών που μπορεί να έχει ένα γράφημα που ανήκει στο \mathcal{G}_n .

5. (15 μονάδες) Συμβολίζουμε με $a_n(p, q)$ το πλήθος των συνόλων $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ τα οποία έχουν p στοιχεία και άθροισμα στοιχείων ίσο με q . Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{p, q \geq 0} a_n(p, q)x^p y^q$ για κάθε θετικό ακέραιο n .

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 2/9/2019 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία