

Διακριτά Μαθηματικά
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2018

1. Δίνονται ακέραιοι $1 \leq k \leq n - 1$. Συμβολίζουμε με $f(n, k)$ το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών (A, B) , όπου A, B είναι υποσύνολα του $\{1, 2, \dots, n\}$ με k στοιχεία, και με $g(n, k)$ το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών (C, D) , όπου C και D είναι υποσύνολα του $\{1, 2, \dots, n\}$ με $k - 1$ και $k + 1$ στοιχεία, αντίστοιχα.

(α) (10 μονάδες) Υπολογίστε τα $f(n, k)$ και $g(n, k)$ για $n = 8$ και $k = 3$.

(β) (5 μονάδες) Δείξτε ότι $f(n, k) > g(n, k)$.

2. (10 μονάδες) Δείξτε ότι

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i}$$

για ακεραίους $1 \leq k \leq n$.

3. Θεωρούμε το σύνολο $P_n = \{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c : a, b, c \in \{0, 1, \dots, n\}\}$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση της διαιρετότητας.

(α) (5 μονάδες) Βρείτε μια αλυσίδα στο P_n με $3n + 1$ στοιχεία.

(β) (10 μονάδες) Δείξτε ότι δεν υπάρχει αλυσίδα στο P_n με περισσότερα από $3n + 1$ στοιχεία.

(γ) (10 μονάδες) Αν $\pi(n)$ είναι το μέγιστο πλήθος στοιχείων μιας αντιαλυσίδας στο P_n , δείξτε ότι

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \leq \pi(n) \leq (n+1)^2.$$

4. (10 μονάδες) Έστω πεπερασμένο δένδρο $T = (V, E)$. Για $J \subseteq V$, συμβολίζουμε με $c_T(J)$ το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του επαγόμενου υπογραφήματος του T στο σύνολο κορυφών J . Δείξτε ότι το πολυώνυμο

$$c_T(x) = \sum_{J \subseteq V} c_T(J) x^{|J|}$$

εξαρτάται μόνο από το πλήθος των κορυφών του T .

5. Θεωρούμε το απλό γράφημα G_n στο σύνολο κορυφών $\{0, 1, \dots, n\}$ με ακμές τα σύνολα $\{0, i\}$ για $1 \leq i \leq n$ και $\{i, i + 1\}$ για $1 \leq i \leq n - 1$.

(α) (5 μονάδες) Για ποιους θετικούς ακεραίους n είναι το γράφημα G_n επιπεδικό;

(α) (5 μονάδες) Για ποιους θετικούς ακεραίους n είναι το γράφημα G_n διπλά συνεκτικό;

(β) (10 μονάδες) Υπολογίστε το χρωματικό αριθμό και το χρωματικό πολυώνυμο του G_n για κάθε θετικό ακέραιο n .

(γ) (10 μονάδες) Αν $\tau(n)$ είναι το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του G_n , υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 1} \tau(n) x^n$ ως ρητή συνάρτηση του x .

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 27/9/2018 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία