

Διακριτά Μαθηματικά
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2017

1. Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, υπολογίστε (όσο το δυνατόν ακριβέστερα) το πλήθος των ζευγών (S, T) υποσυνόλων του Ω :

- (α) (5 μονάδες) Χωρίς περιορισμούς στα S και T .
- (β) (5 μονάδες) Με τον περιορισμό ότι το πλήθος των στοιχείων του S είναι ίσο με εκείνο του T .
- (γ) (10 μονάδες) Με τον περιορισμό ότι $S \subseteq T$.

2. (10 μονάδες) Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} 2^{2n-2k}$$

για $n \in \mathbb{N}$.

3. (10 μονάδες) Δίνονται δέκα σημεία ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς μήκους 3. Δείξτε ότι ανάμεσα στα σημεία αυτά υπάρχουν δύο τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση μικρότερη ή ίση του 1.

4. (10 μονάδες) Για ποιους θετικούς ακεραίους n υπάρχει απλό, συνεκτικό γράφημα με n κορυφές, καθεμιά από τις οποίες έχει βαθμό 3;

5. Θεωρούμε το απλό γράφημα G στο σύνολο κορυφών $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ με ακμές $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$ και $\{4, 5\}$.

- (α) (10 μονάδες) Υπολογίστε το χρωματικό αριθμό του G . Είναι το G διμερές;
- (β) (10 μονάδες) Βρείτε το μέγιστο ακέραιο k για τον οποίο το G είναι k -συνεκτικό.
- (γ) (5 μονάδες) Είναι το G επιπεδικό;
- (δ) (5 μονάδες) Πόσα παράγοντα δένδρα έχει το G ;
- (ε) (5 μονάδες) Υπολογίστε το χρωματικό πολυώνυμο του G .

6. (15 μονάδες) Συμβολίζουμε με $f(n)$ το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του πλήρους απλού γραφήματος με n κορυφές. Βρείτε έναν όσο το δυνατό πιο απλό, κλειστό τύπο για την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 1} f(n) \frac{x^n}{n!}$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 21/9/2017 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία