

Διακριτά Μαθηματικά
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2015

1. Δίνεται σύνολο S που αποτελείται από n φοιτητές.
- (α) (10 μονάδες) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μια επιτροπή (δηλαδή ένα υποσύνολο) από το S με άρτιο πλήθος στοιχείων και να ορίσουμε ως πρόεδρο ένα μέλος της επιτροπής; Για παράδειγμα, για $n = 2$ υπάρχουν δύο τρόποι, καθώς πρέπει αναγκαστικά να επιλέξουμε όλο το S ως επιτροπή και ένα από τα δύο στοιχεία του ως πρόεδρο.
- (β) (10 μονάδες) Έστω a_n το πλήθος των τρόπων του ερωτήματος (α), οπότε $a_0 = a_1 = 0$ και $a_2 = 2$. Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ως ρητή συνάρτηση του x .
2. (10 μονάδες) Χρωματίζουμε καθένα από τα 4-υποσύνολα (δηλαδή υποσύνολα με τέσσερα στοιχεία) του συνόλου $\{1, 2, \dots, 9\}$ με ένα από πέντε χρώματα. Δείξτε ότι υπάρχουν 26 από τα υποσύνολα που έχουν το ίδιο χρώμα.
3. Θεωρούμε τη διμελή σχέση \preceq στο σύνολο $\Omega_n = \{1, -1, 2, -2, \dots, n, -n\}$ που ορίζεται θέτοντας $a \preceq b$ αν $a = b$ ή $|a| < |b|$ για $a, b \in \Omega_n$. Θέτουμε $P_n := (\Omega_n, \preceq)$.
- (α) (10 μονάδες) Δείξτε ότι η \preceq είναι μερική διάταξη στο Ω_n . Σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse του μερικώς διατεταγμένου συνόλου P_n για $n = 4$.
- (β) (10 μονάδες) Υπολογίστε το ύψος και το πλάτος του P_n για κάθε n .
- (γ) (5 μονάδες) Έστω a_n το πλήθος των αλυσίδων μέγιστου δυνατού μήκους $\text{height}(P_n)$ του P_n . Υπολογίστε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{n!}$.
4. Θεωρούμε το απλό γράφημα G στο σύνολο κορυφών $V = \{1, 2, \dots, 8\}$ με ακμές τα υποσύνολα $\{a, b\}$ του V για τα οποία ισχύει είτε $1 \leq a < b \leq 5$, είτε $5 \leq a < b \leq 8$.
- (α) (10 μονάδες) Πόσες ακμές έχει το G ; Είναι το G συνεκτικό γράφημα;
- (β) (10 μονάδες) Πόσα παράγοντα δένδρα έχει το G ;
- (γ) (10 μονάδες) Ποιος είναι ο χρωματικός αριθμός του G ; Ποιο είναι το χρωματικό πολυώνυμο του G ;
- (δ) (5 μονάδες) Είναι το G επιπεδικό γράφημα;
5. (10 μονάδες) Σε ένα πάρτυ υπάρχουν n αγόρια και n κορίτσια. Υποθέτουμε ότι το αγόρι a γνωρίζει το κορίτσι b αν και μόνο αν το κορίτσι b γνωρίζει το αγόρι a (για κάθε a και b) και ότι υπάρχει $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ με την εξής ιδιότητα: κάθε αγόρι γνωρίζει τουλάχιστον $n - k$ κορίτσια και κάθε κορίτσι γνωρίζει τουλάχιστον k αγόρια. Δείξτε ότι όλα τα αγόρια μπορούν να χορέψουν ταγκώ ταυτόχρονα, καθένα με κάποιο κορίτσι που γνωρίζει.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 11/9/2015 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία