

252: ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2006-2007

Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου

1. Σε καθεμιά από οκτώ όμοιες θέσεις γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι κάθετα ένα από τα μέλη μιας οκταμελούς επιτροπής Σ , δημιουργώντας έτσι μια κυκλική αναδιάταξη της Σ . (Διευκρίνιση: Θεωρώντας ότι οι οκτώ θέσεις αποτελούν τις κορυφές ενός κανονικού οκταγώνου P στο επίπεδο, δύο κυκλικές αναδιατάξεις της Σ ταυτίζονται αν και μόνο αν η μία προκύπτει από την άλλη με κατάλληλη στροφή του επιπέδου γύρω από το κέντρο του P).

- (α) Πόσες κυκλικές αναδιατάξεις υπάρχουν συνολικά;
- (β) Πόσες κυκλικές αναδιατάξεις υπάρχουν αν δύο από τα μέλη της Σ είναι μαλωμένα και δεν μπορούν να καθήσουν ο ένας δίπλα στον άλλο;
- (γ) Πόσες κυκλικές αναδιατάξεις υπάρχουν αν μεταξύ των μελών της Σ υπάρχουν τέσσερις άνδρες και τέσσερις γυναίκες και κάθε άνδρας πρέπει να κάθετα δίπλα σε δύο γυναίκες;

2. Για τα υποσύνολα A, B, C του συνόλου $\{1, 2, \dots, 20\}$ ισχύουν $|A| = 11$, $|B| = 9$, $|C| = 11$, $|A \cap B| = 4$, $|A \cap C| = 4$, $|B \cap C| = 5$ και $|A \cap B \cap C| = 1$ (όπου με $|S|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου S). Πόσα στοιχεία του $\{1, 2, \dots, 20\}$ δεν ανήκουν στο σύνολο $A \cup B \cup C$;

3. Δίνονται 13 διακεκριμένα σημεία στο 3×2 ορθογώνιο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$. Δείξτε ότι ανάμεσα στα σημεία αυτά υπάρχουν τρία, κάθε δύο από τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση μικρότερη ή ίση του $\sqrt{2}$.

4. Σε μια γιορτή συμμετέχουν συνολικά 50 άτομα (άνδρες και γυναίκες). Κάθε άνδρας γνωρίζει ακριβώς έξι γυναίκες και κάθε γυναίκα γνωρίζει ακριβώς τέσσερις άνδρες (θεωρούμε ότι ο A γνωρίζει τη B εάν και μόνο αν η B γνωρίζει τον A).

- (α) Πόσοι είναι οι άνδρες και πόσες οι γυναίκες;
- (β) Δείξτε ότι όλοι οι άνδρες μπορούν να χορέψουν τανγκό ταυτόχρονα, ο καθένας με μια γυναίκα που γνωρίζει.

5. Για ένα πεπερασμένο απλό γράφημα G , είναι γνωστά τα εξής: (i) κάθε κορυφή του G έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2 και (ii) δεν υπάρχουν τρεις διακεκριμένες κορυφές του G οι οποίες ανά δύο ενώνονται με ακμή. Βρείτε (με απόδειξη) τη μέγιστη δυνατή τιμή του χρωματικού αριθμού του G .

6. Έστω $\chi_n(q)$ το χρωματικό πολυώνυμο του κύκλου μήκους n (ώστε, για παράδειγμα, έχουμε $\chi_3(q) = q^3 - 3q^2 + 2q$).

- (α) Υπολογίστε το πολυώνυμο $\chi_n(q)$ για $n = 5$.
- (β) Υπολογίστε, ως συνάρτηση του n , το συντελεστή του q στο πολυώνυμο $\chi_n(q)$ για θετικούς ακεραίους $n \geq 3$.