

Διακριτά Μαθηματικά
Θέματα Πτυχιακής Εξεταστικής
Μάρτιος 2013

1. (5 μονάδες) Έστω a_n το πλήθος των ακολουθιών (r_1, r_2, \dots, r_k) τυχαίου μήκους k με στοιχεία θετικούς ακεραίους r_i που αθροίζουν στο n . Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ ως ρητή συνάρτηση του x .

2. Για πόσες αναδιατάξεις $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$ του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

(α) (10 μονάδες) το σ_1 είναι περιττός αριθμός και το σ_6 είναι άρτιος;

(β) (10 μονάδες) δεν υπάρχει σταθερό σημείο το οποίο είναι άρτιος αριθμός;

3. Έστω P_n το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $\{1, -1, 2, -2, \dots, n, -n\}$ τα οποία περιέχουν το πολύ ένα στοιχείο του $\{i, -i\}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Θεωρούμε τη μερική διάταξη στο P_n που ορίζεται θέτοντας $S \leq T$ αν $S \subseteq T$, για $S, T \in P_n$.

(α) (10 μονάδες) Για $0 \leq k \leq n$, πόσα στοιχεία του P_n έχουν πληθάρημο ίσο με k ; Πόσα στοιχεία έχει συνολικά το P_n ;

(β) (5 μονάδες) Σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse της διάταξης P_n για $n = 2$.

(γ) (5 μονάδες) Υπολογίστε το ύψος της P_n για κάθε θετικό ακέραιο n .

(δ) (10 μονάδες) Δείξτε ότι για το πλάτος της P_n ισχύει $\text{width}(P_n) \geq (3^n - 1)/n$ για κάθε θετικό ακέραιο n .

(ε) (5 μονάδες) Δείξτε ότι για το πλάτος της P_4 ισχύει $\text{width}(P_4) \geq 32$.

4. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

(α) (5 μονάδες) Αν T_1 και T_2 είναι δένδρα στο σύνολο κορυφών $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ καθένα από τα οποία έχει κορυφή βαθμού 5, τότε τα T_1 και T_2 είναι ισόμορφα γραφήματα.

(β) (10 μονάδες) Αν T_1 και T_2 είναι δένδρα στο σύνολο κορυφών $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ καθένα από τα οποία έχει κορυφή βαθμού 4, τότε τα T_1 και T_2 είναι ισόμορφα γραφήματα.

(γ) (10 μονάδες) Αν T_1 και T_2 είναι δένδρα στο σύνολο κορυφών $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ καθένα από τα οποία έχει κορυφή βαθμού 3, τότε τα T_1 και T_2 είναι ισόμορφα γραφήματα.

5. Συμβολίζουμε με $\chi_G(q)$ το χρωματικό πολυώνυμο ενός απλού γραφήματος G .

(α) (10 μονάδες) Δώστε παράδειγμα γραφήματος G με $\chi_G(q) = q(q-1)(q-2)^3$.

(β) (5 μονάδες) Δείξτε ότι δεν υπάρχει γράφημα G με $\chi_G(q) = q(q-2)^2(q^2 - q + 1)$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 7/3/2013 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία