

252 Διακριτά Μαθηματικά
Εξετάσεις Ιουνίου 2026
Αθήνα 11/6/2026

Η εξέταση αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας σύντομα την απάντησή σας. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το μέρος Α είναι οι 6 μονάδες.

A1. Αν $a_0 = 1$ και $a_n = na_{n-1}$ για $n \geq 1$, τότε ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός m για τον οποίο το 2^m διαιρεί το a_{10} είναι

(α) μικρότερος από 4 (β) ίσος με 4 (γ) ίσος με 5 (δ) ίσος με 6 (ε) ίσος με 7 (στ) μεγαλύτερος από 7

A2. Το πλήθος των τριάδων $(a, b, c) \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}^3$ με $|a| \neq |b|$, $a \neq c$ και $b \neq c$ είναι ίσο με
(α) 18 (β) 20 (γ) 21 (δ) 192 (ε) 288 (στ) 336

A3. Το πλήθος των τριάδων $(a, b, c) \in \{1, 2, 3, \dots\}^3$ θετικών ακεραίων με $a + b + c \leq 10$ είναι ίσο με

(α) 60 (β) 84 (γ) 120 (δ) 124 (ε) 210 (στ) 240

A4. Ο συντελεστής του x^7 στο πολυώνυμο $(x - 1)^7(x + 1)^7$ είναι ίσος με

(α) μηδέν (β) 1 (γ) -1 (δ) 35 (ε) -35 (στ) 128

A5. Το πλήθος των αναδιατάξεων $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$ του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ για τις οποίες $\sigma_2 \neq \sigma_1 + 1$ και $\sigma_3 \neq \sigma_2 + 1$ είναι ίσο με

(α) 520 (β) 522 (γ) 524 (δ) 526 (ε) 528 (στ) 530

A6. Το μέγιστο δυνατό πλήθος ακεραίων που μπορούν να επιλεγούν από τους 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, έτσι ώστε κανένας ακέραιος που επιλέχθηκε να μη διαιρεί κάποιον άλλο, είναι ίσο με

(α) 2 (β) 3 (γ) 4 (δ) 5 (ε) 6 (στ) 7

A7. Το μέγιστο δυνατό πλήθος στοιχείων ενός μέρους μιας διαμέρισης του συνόλου $\{1, 2, \dots, 60\}$ με δέκα μέρη είναι ίσο με

(α) 30 (β) 31 (γ) 40 (δ) 41 (ε) 50 (στ) 51

A8. Ένα απλό γράφημα G έχει οκτώ κορυφές και 23 ακμές. Ποιος είναι ο ελάχιστος βαθμός που μπορεί να έχει μια κορυφή του G ;

(α) μηδέν (β) 1 (γ) 2 (δ) 3 (ε) 4 (στ) 5

A9. Το πλήθος των απλών γραφημάτων με σύνολο κορυφών $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και πέντε ακμές τα οποία δεν έχουν κύκλους είναι ίσο με

(α) 64 (β) 120 (γ) 480 (δ) 512 (ε) 720 (στ) 1296

A10. Ένα απλό γράφημα G έχει οκτώ κορυφές και πέντε ακμές. Ποιες τιμές μπορεί να λάβει το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του G ;

(α) μόνο την τιμή μηδέν (β) μόνο την τιμή 1 (γ) μόνο την τιμή 2 (δ) μόνο τις τιμές 0 και 1
(ε) μόνο τις τιμές 1 και 2 (στ) μόνο τις τιμές 0, 1 και 2

A11. Η μέγιστη τιμή του χρωματικού αριθμού ενός απλού συνεκτικού γραφήματος με οκτώ κορυφές και οκτώ ακμές είναι ίση με

(α) 1 (β) 2 (γ) 3 (δ) 4 (ε) 5 (στ) 6

A12. Αν $\sum_{n \geq 0} a_n x^n = 1/(1-x)^2$, τότε η τυπική δυναμοσειρά $\sum_{n \geq 0} a_n^2 x^n$ ισούται με

(α) $1/(1-x)^3$ (β) $(1+x)/(1-x)^3$ (γ) $(1+x)^2/(1-x)^3$ (δ) $1/(1-x)^4$ (ε) $(1+x)/(1-x)^4$
(στ) $(1+x+x^2)/(1-x)^4$

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται. Γράφετε ευανάγνωστα! Μέγιστη βαθμολογία για το μέρος Β είναι οι 4 μονάδες.

B1. Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k}$$

για $n \in \mathbb{N}$, όπου $a_n = 1 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ για $n \in \mathbb{N}$.

B2.

(α) Έστω απλό γράφημα $G = (V, E)$ και ακμή $e \in E$ που δεν ανήκει σε κανένα κύκλο του G . Δείξτε ότι

$$\chi_G(x) = \frac{x-1}{x} \cdot \chi_{G \setminus e}(x).$$

(β) Έστω G_n το απλό γράφημα με σύνολο κορυφών $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ και ακμές τα ζεύγη κορυφών $\{a, b\}$ με $|a-b| \leq 2$. Αν c_n είναι το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του G_n , υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ ως ρητή συνάρτηση του x (όπου $c_0 = 1$).

B3. Για $n \in \mathbb{N}$ έστω $f(n)$ το πλήθος των τριάδων $(a, b, c) \in \{1, 2, \dots, n\}^3$ με $a \neq b \neq c \neq a$, όπου $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Υπολογίστε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} f(n) x^n / n!$.

Καλή Επιτυχία!