

Διακριτά Μαθηματικά
Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2018

1. Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $a_0 = a_1 = 1$ και $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ για $n \geq 1$.
- (α) (5 μονάδες) Δείξτε ότι $a_{2n+2} = 3a_{2n} - a_{2n-2}$ για $n \geq 1$.
- (β) (10 μονάδες) Υπολογίστε την τυπική δυναμοσειρά $\sum_{n \geq 0} a_{2n} x^n$ ως ρητή συνάρτηση του x .
2. Επιλέγουμε μία αναδιάταξη $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$ του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ και χρωματίζουμε κάθε όρο σ_i άσπρο ή μαύρο.
- (α) (5 μονάδες) Με πόσους τρόπους συνολικά μπορεί να γίνει αυτό;
- (β) (10 μονάδες) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, αν κάθε σταθερό σημείο της σ πρέπει να είναι άσπρο;
3. (10 μονάδες) Θεωρούμε τα διανύσματα $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{N}^4$ με $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5$. Χρωματίζουμε καθένα από τα διανύσματα αυτά με ένα από πέντε χρώματα. Δείξτε ότι υπάρχουν 12 διανύσματα που έχουν το ίδιο χρώμα.
4. Δίνεται ακέραιος $n \geq 3$. Θεωρούμε απλό, συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές και n ακμές.
- (α) (10 μονάδες) Δείξτε ότι το G έχει το πολύ $n - 3$ κορυφές βαθμού ένα και δώστε παράδειγμα τέτοιου γραφήματος με ακριβώς $n - 3$ κορυφές βαθμού ένα.
- (β) (5 μονάδες) Για $n = 8$, δώστε παράδειγμα τέτοιου γραφήματος το οποίο δεν έχει τέλειο ταιριασμα.
- (γ) (10 μονάδες) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές για το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του G ;

5. Θεωρούμε το άθροισμα

$$s_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} - \dots$$

για $n \in \mathbb{N}$.

- (α) (5 μονάδες) Υπολογίστε το s_n για $n = 11$ και $n = 12$.
- (β) (10 μονάδες) Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} s_n x^n$ ως ρητή συνάρτηση του x .
- (γ) (5 μονάδες) Δείξτε ότι $s_n \in \{-1, 0, 1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 21/6/2018 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία