Διακριτά Μαθηματικά
Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2017

1. Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, υπολογίστε (όσο το δυνατόν ακριβέστερα) το πλήθος των ζευγών (S, T) υποσυνόλων του Ω με $|S| = 3$ και $|T| = 5$:

(α) (5 μονάδες) Χωρίς επιπλέον περιορισμούς στα S και T.

(β) (5 μονάδες) Με τον επιπλέον περιορισμό ότι $S \subseteq T$.

(γ) (10 μονάδες) Με τον επιπλέον περιορισμό ότι $S \cup T \neq \Omega$.

2. (15 μονάδες) Υπολογίστε τα αθροίσματα

(α) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$,

(β) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1}\binom{n}{k}$,

(γ) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{k+1}\binom{n}{k}$,

ως συναρτήσεις του $n \in \mathbb{N}$.

3. Δίνεται θετικός ακέραιος n και το σύνολο $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Θεωρούμε απεικονίσεις $f_1, f_2, \ldots, f_k : S \to S$, τέτοιες ώστε να ισχύει $f_i(x) \neq f_j(x)$ για κάθε $x \in S$ και για όλους τους δείκτες $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ με $i \neq j$.

(α) (10 μονάδες) Δείξτε ότι $k \leq n$.

(β) (10 μονάδες) Δείξτε ότι υπάρχουν τέτοιες απεικονίσεις για $k = n$.

4. Θεωρούμε απλό πεπερασμένο γράφημα G με n κορυφές, καθεμιά από τις οποίες έχει βαθμό ένα ή τρία.

(α) (10 μονάδες) Ποιες είναι οι πιθανές τιμές του n;

(β) (10 μονάδες) Αν το G είναι δένδρο, δείξτε ότι περισσότερες από τις μισές του κορυφές είναι φύλλα και ότι, αν $n \neq 2$, τότε το G δεν έχει τέλειο ταίριασμα.

5. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ και $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ για $n \geq 2$.

(α) (10 μονάδες) Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

(β) (5 μονάδες) Βρείτε έναν απλό τύπο για το a_n.

(γ) (10 μονάδες) Υπολογίστε το συντελεστή του x^{15} στην $(F(x))^3$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 7/6/2017 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία