Διακριτά Μαθηματικά
Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2013

1. Από δέκα φοιτητές επιλέγουμε μια τριμελή και μια τετραμελή επιτροπή (οι επιτροπές θεωρούνται ως υποσύνολα του συνόλου των φοιτητών).

(α) (5 μονάδες) Με πόσους τρόπους συνολικά μπορεί να γίνει αυτό;

(β) (5 μονάδες) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, αν κάθε φοιτητής μπορεί να ανήκει σε μία το πολύ επιτροπή;

(γ) (10 μονάδες) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, αν το πολύ ένας φοιτητής μπορεί να ανήκει και στις δύο επιτροπές;

2. (15 μονάδες) Δύο θετικοί ακέραιοι λέγονται πρώτοι μεταξύ τους αν δεν έχουν κοινό ακέραιο διαιρέτη μεγαλύτερο του ένα. Βρείτε (με απόδειξη) το μέγιστο πλήθος στοιχείων του συνόλου $\{2, 3, 4, \ldots, 30\}$ που μπορούν να επιλεγούν, έτσι ώστε οποιοιδήποτε δύο από τους ακεραίους που έχουν επιλεγεί να είναι πρώτοι μεταξύ τους.

3. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

(α) (10 μονάδες) Κάθε απλό γράφημα με 9 κορυφές και 23 ακμές έχει τουλάχιστον μία κορυφή βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 6.

(β) (5 μονάδες) Κάθε απλό γράφημα με 8 κορυφές και 16 ακμές έχει τουλάχιστον μία κορυφή βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 5.

4. Δείξτε ότι:

(α) (5 μονάδες) Υπάρχει απλό γράφημα με 6 κορυφές και 10 ακμές το οποίο δεν έχει τέλειο ταίριασμα.

(β) (5 μονάδες) Κάθε απλό γράφημα με 6 κορυφές και 11 ακμές έχει τέλειο ταίριασμα.

5. Δίνεται το πολυώνυμο $\chi(q) = q(q-1)^2(q-2)^2 = q^5 - 6q^4 + 13q^3 - 12q^2 + 4q$.

(α) (10 μονάδες) Πόσες κορυφές και πόσες ακμές μπορεί να έχει ένα απλό γράφημα με χρωματικό πολυώνυμο $\chi(q)$;

(β) (5 μονάδες) Υπάρχει διμερές γράφημα με χρωματικό πολυώνυμο $\chi(q)$;

(γ) (5 μονάδες) Υπάρχει μη συνεκτικό γράφημα με χρωματικό πολυώνυμο $\chi(q)$;

(δ) (5 μονάδες) Υπάρχουν δύο απλά γραφήματα με χρωματικό πολυώνυμο $\chi(q)$ τα οποία δεν είναι μεταξύ τους ισόμορφα;

6. (15 μονάδες) Για δοσμένο θετικό ακέραιο n, υπολογίστε το πλήθος των ακολουθιών $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ με τις εξής ιδιότητες: (i) $\sigma_i \in \{0, 1, 2\}$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ και (ii) το πλήθος των δεικτών $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με $\sigma_i \in \{0, 1\}$ είναι άρτιος αριθμός.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 4/6/2013 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία