

Διακριτά Μαθηματικά
Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2010

1. Για $n \in \mathbb{N}$, έστω a_n το πλήθος των υποσυνόλων του συνόλου $\{1, 2, \dots, 2n\}$ τα οποία περιέχουν τουλάχιστον ένα ακέραιο μεγαλύτερο ή ίσο του $n + 1$.

(α) (10 μονάδες) Υπολογίστε το a_n για $n = 4$.

(β) (5 μονάδες) Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{2x}{(1-2x)(1-4x)},$$

όπου $a_0 = 0$.

2. (15 μονάδες) Δίνεται ένα σύνολο n φοιτητών. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί μια επιτροπή από το σύνολο αυτό και ένα το πολύ (πιθανώς κανένα) στοιχείο της ως πρόεδρος; Σημειώνεται ότι η επιτροπή μπορεί να είναι κενή και ότι τα στοιχεία της δε θεωρούνται διατεταγμένα (η σωστή απάντηση είναι 3, 8, 20 για $n = 1, 2, 3$, αντίστοιχα).

3. Έστω P_n το σύνολο των ακολουθιών (a_1, a_2, \dots, a_n) με $a_i \in \{0, 1\}$ για $1 \leq i \leq n$. Για στοιχεία $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ και $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ του P_n γράφουμε $a \preceq b$, αν ισχύει $a_i \leq b_i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$.

(α) (10 μονάδες) Δείξτε ότι η σχέση \preceq είναι μερική διάταξη στο σύνολο P_n .

(β) (10 μονάδες) Έχει το μερικώς διατεταγμένο σύνολο (P_n, \preceq) ελάχιστο στοιχείο; Έχει μέγιστο στοιχείο;

(γ) (5 μονάδες) Σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse του (P_n, \preceq) για $n = 3$.

(δ) (10 μονάδες) Υπολογίστε το ύψος και το πλάτος του (P_n, \preceq) για $n = 5$.

4. Συμβολίζουμε με G_n το $n \times 2$ γράφημα του Μανχάταν (ώστε το G_n έχει $2n$ κορυφές).

(α) (10 μονάδες) Είναι το γράφημα G_3 συνεκτικό; Είναι 2-συνεκτικό;

(β) (10 μονάδες) Πόσα τέλεια ταιριάσματα έχει το γράφημα G_3 ; Πόσα έχει το G_4 ;

(γ) (10 μονάδες) Πόσα παράγοντα δένδρα έχει το G_3 ; Πόσα έχει το G_4 ;

5. (10 μονάδες) Υπολογίστε τον ελάχιστο χρωματικό αριθμό που μπορεί να έχει ένα απλό 3-συνεκτικό γράφημα.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 21/6/2010 – Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες – Καλή Επιτυχία