252: ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Εαρινό Εξάμηνο 2006-2007
Θέματα Εξετάσεων Ιουλίου

A

1. Δίνονται 15 σημεία στο επίπεδο, από τα οποία πέντε είναι κόκκινα, πέντε πράσινα και πέντε μπλε. Σχηματίζουμε τρίγωνα στο επίπεδο, οι κορυφές των οποίων είναι κάποια από τα δοσμένα σημεία.

(α) (10 μονάδες) Πόσα τρίγωνα μπορούμε συνολικά να σχηματίσουμε;

(β) (10 μονάδες) Πόσα τρίγωνα T μπορούμε να σχηματίσουμε αν οι κορυφές του T πρέπει ανά δύο να έχουν διαφορετικό χρώμα;

(γ) (10 μονάδες) Πόσα τρίγωνα T μπορούμε να σχηματίσουμε αν δύο από τις κορυφές του T πρέπει να έχουν το ίδιο χρώμα και η τρίτη κορυφή να έχει διαφορετικό χρώμα από τις άλλες δύο;

2. (10 μονάδες) Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο P έχει επτά στοιχεία και ύψος ίσο με 4. Βρείτε (με απόδειξη) τη μέγιστη δυνατή τιμή του πλάτους του P.

3. (10 μονάδες) Πόσα δένδρα T υπάρχουν στο σύνολο κορυφών $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, για τα οποία το $n+1$ είναι φύλλο του T;

4. Για θετικό ακέραιο n, έστω G_n το απλό γράφημα με κορυφές τις αναδιατάξεις του $\{1, 2, \ldots, n\}$ στο οποίο δύο αναδιατάξεις σ, τ συνδέονται με ακμή αν η μια προκύπτει από την άλλη ανταλλάσσοντας τις θέσεις δύο διαδοχικών στοιχείων, δηλαδή αν $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ και $\tau = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i+1}, \sigma_i, \ldots, \sigma_n)$ για κάποιο δείκτη i με $1 \le i < n$. Για παράδειγμα για $n = 5$, η αναδιάταξη $(3, 1, 5, 4, 2)$ συνδέεται με ακμή στο γράφημα G_5 με καθεμιά από τις $(1, 3, 5, 4, 2)$, $(3, 5, 1, 4, 2)$, $(3, 1, 4, 5, 2)$ και $(3, 1, 5, 2, 4)$.

(α) (20 μονάδες)

- (α1) Πόσες κορυφές έχει το γράφημα G_n;
- (α2) Είναι το G_3 συνεκτικό γράφημα; Είναι το G_3 διμερές; Πόσα τέλεια ταιριάσματα έχει το G_3; (*Υπόδειξη*: Σχεδιάστε το G_3 πριν απαντήσετε.)

(β) (10 μονάδες) Πόσες ακμές έχει το γράφημα G_n (επαληθεύστε τον τύπο που θα βρείτε για $n = 2$ και $n = 3$);

(γ) (10 μονάδες) Υπολογίστε το χρωματικό αριθμό του G_n ως συνάρτηση του n.

5. (10 μονάδες) Ένα απλό πολύγωνο P στο επίπεδο έχει κορυφές σημεία του $\mathbb{Z}^2$ και εμβαδό ίσο με 3. Βρείτε (με απόδειξη) το μέγιστο δυνατό πλήθος σημείων του $\mathbb{Z}^2$ που μπορούν να βρίσκονται στο εσωτερικό του P.

Πρόβλημα Bonus. Βρείτε (με απόδειξη) το πλήθος των ακολουθιών $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ θετικών ακεραίων με την εξής ιδιότητα: για κάθε $1 \le i \le n$ οι ακέραιοι $1, 2, \ldots, i$ εμφανίζονται στην a συνολικά τουλάχιστον i φορές (π.χ. για $n = 3$ οι ακολουθίες αυτές είναι οι 111, 112, 121, 211, 122, 212, 221, 113, 131, 311, 123, 132, 213, 231, 312 και 321).

Αθήνα 16/7/2007 – Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες – Καλή Επιτυχία