252 Διακριτά Μαθηματικά
Εξετάσεις Ιανουαρίου 2026
Αθήνα 04/02/2026

Η εξέταση αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας σύντομα την απάντησή σας. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το πρώτο μέρος είναι οι 6 μονάδες.

Υπενθυμίζεται ότι $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Α1. Αν $a_0 = 1$ και $a_{n+1} = a_n + 2n$ για $n \in \mathbb{N}$, τότε ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n για τον οποίο $a_n > 400$

(α) δεν ορίζεται (β) είναι μικρότερος από 20 (γ) ισούται με 20 (δ) ισούται με 21 (ε) ισούται με 22 (στ) είναι μεγαλύτερος από 22

Α2. Το πλήθος των πεντάδων $(a, b, c, d, e) \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}^5$ με $a - d = 3$ και $b + c = 10$ είναι ίσο με

(α) 45 (β) 63 (γ) 70 (δ) 450 (ε) 630 (στ) 700

Α3. Το πλήθος των αναδιατάξεων $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8)$ του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ για τις οποίες τα $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5, \sigma_7$ είναι άρτιοι και τα $\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6, \sigma_8$ είναι περιττοί αριθμοί είναι ίσο με

(α) μηδέν (β) 24 (γ) 48 (δ) 96 (ε) 288 (στ) 576

Α4. Ο συντελεστής του x^8 στο πολυώνυμο $(x^2 + 1)^8$ είναι ίσος με

(α) 1 (β) 8 (γ) 28 (δ) 56 (ε) 70 (στ) 120

Α5. Το πλήθος των υποσυνόλων του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ που δεν περιέχουν ούτε το σύνολο $\{2, 3, 4\}$ ούτε το $\{4, 5, 6\}$ είναι ίσο με

(α) 196 (β) 200 (γ) 204 (δ) 208 (ε) 212 (στ) 216

Α6. Δίνεται η ακολουθία $\sigma = (4, 3, 2, 1, 7, 6, 5, 10, 9, 8)$. Το μέγιστο δυνατό πλήθος όρων (μήκος) μιας αύξουσας υποακολουθίας της σ είναι ίσο με

(α) 1 (β) 2 (γ) 3 (δ) 4 (ε) 5 (στ) 6

Α7. Το μέγιστο δυνατό πλήθος κορυφών βαθμού 2 ενός απλού γραφήματος με έξι κορυφές και επτά ακμές είναι ίσο με

(α) 1 (β) 2 (γ) 3 (δ) 4 (ε) 5 (στ) 6

Α8. Το μέγιστο δυνατό πλήθος στοιχείων ενός ταιριάσματος του απλού γραφήματος με κορυφές 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 και ακμές $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 3\}$, $\{0, 4\}$, $\{0, 5\}$ και $\{0, 6\}$ είναι ίσο με

(α) 1 (β) 2 (γ) 3 (δ) 4 (ε) 5 (στ) 6

A9. Το πλήθος των γνήσιων (κατάλληλων) χρωματισμών του πλήρους γραφήματος K_4 με πέντε χρώματα ισούται με

(α) μηδέν (β) 12 (γ) 24 (δ) 48 (ε) 60 (στ) 120

A10. Το μέγιστο δυνατό πλήθος ακμών ενός απλού επιπεδικού γραφήματος με κορυφές 1, 2, 3, 4, 5 ισούται με

(α) 5 (β) 6 (γ) 7 (δ) 8 (ε) 9 (στ) 10

A11. Αν $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 1/(1-2x)(1-4x)$, τότε για $n \geq 2$ το a_n είναι ίσο με

(α) $6a_{n-1}+8a_{n-2}$ (β) $8a_{n-1}+6a_{n-2}$ (γ) $6a_{n-1}-8a_{n-2}$ (δ) $8a_{n-1}-6a_{n-2}$ (ε) $-6a_{n-1}+8a_{n-2}$ (στ) $-8a_{n-1}+6a_{n-2}$

A12. Ο συντελεστής του x^5 στην τυπική δυναμοσειρά $e^{-x}/(1-x)$ είναι ίσος με

(α) 11/30 (β) 12/30 (γ) 13/30 (δ) 14/30 (ε) 15/30 (στ) 16/30

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το δεύτερο μέρος είναι οι 4 μονάδες.

B1.

(α) Υπολογίστε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}$ για $n \in \mathbb{N}$.

(β) Υπολογίστε το πλήθος των ακολουθιών $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}^5$ που έχουν τις εξής ιδιότητες: (i) καθένα από τα $1, 2, 3$ εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στη σ, και (ii) το 5 εμφανίζεται το πολύ μία φορά στη σ.

B2.

(α) Συμβολίζουμε με $\square_n$ το απλό γράφημα με σύνολο κορυφών

$$\{0,1\}^n = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i \in \{0,1\}\}$$

στο οποίο δύο κορυφές είναι γειτονικές αν και μόνο αν διαφέρουν σε μία ακριβώς συντεταγμένη. Για ποιους θετικούς ακεραίους n είναι το γράφημα $\square_n$ επιπεδικό;

(β) Έστω $f(n)$ το πλήθος των τριάδων $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ για τις οποίες $a \leq n$, $b \leq n$ και $a+b+c \leq 3n$. Για παράδειγμα, $f(0) = 1$, $f(1) = 12$ και $f(2) = 45$. Βρείτε έναν όσο το δυνατό απλούστερο τύπο για το $f(n)$ και δείξτε ότι

$$\sum_{n\geq 0} f(n)x^n = \frac{1+8x+3x^2}{(1-x)^4}.$$

Καλή Επιτυχία!