

Διακριτά Μαθηματικά
Θέματα Εξετάσεων Φεβρουαρίου 2019

1. Έστω $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- (α) (5 μονάδες) Για πόσες απεικονίσεις $f : X \rightarrow X$ ισχύει $f(x) \leq x$ για κάθε $x \in X$;
- (β) (5 μονάδες) Για πόσες απεικονίσεις $f : X \rightarrow X$ ισχύει $f(x) = x$ για τουλάχιστον ένα $x \in X$;
- (γ) (5 μονάδες) Για πόσες απεικονίσεις $f : X \rightarrow X$ ισχύει $f(x) = x$ για ακριβώς δύο $x \in X$;
- (δ) (10 μονάδες) Για πόσες απεικονίσεις $f : X \rightarrow X$ ισχύει $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ για $x, y \in X$;

2. (15 μονάδες) Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^r \binom{n+k}{k} \binom{m+n+k}{n+k} = \binom{m+n}{n} \binom{m+n+r+1}{m+n+1}$$

για $m, n, r \in \mathbb{N}$.

3. (10 μονάδες) Ένα υποσύνολο S του $\Omega := \{1, 2, \dots, 90\}$ λέγεται *αραιό* αν $|a - b| \geq 3$ για οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία $a, b \in S$. Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος στοιχείων που μπορεί να έχει ένα αραιό υποσύνολο του Ω ;

4. Θεωρούμε το πλήρες απλό γράφημα K_n στο σύνολο κορυφών $\{1, 2, \dots, n\}$, μαζί με τη συνάρτηση βάρους w για την οποία $w(\{a, b\}) = \max\{a, b\}$ για κάθε ακμή $\{a, b\}$.

(α) (15 μονάδες) Δείξτε ότι

$$(n^2 + n - 2)/2 \leq w(T) \leq n^2 - n$$

για κάθε παράγον δένδρο T του K_n , όπου με $w(T)$ συμβολίζουμε το άθροισμα των βαρών των ακμών του T .

(β) (5 μονάδες) Για πόσα παράγοντα δένδρα T του K_n έχουμε $w(T) = (n^2 + n - 2)/2$;

5. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $a_0 = 1$ και $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + (-1)^n)$ για $n \in \mathbb{N}$.

(α) (10 μονάδες) Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ως ρητή συνάρτηση του x και δείξτε ότι $a_n = (a_{n-2} - a_{n-1})/2$ για $n \geq 2$.

(β) (10 μονάδες) Βρείτε έναν όσο το δυνατόν απλούστερο τύπο για το a_n .

(γ) (10 μονάδες) Έστω $b_n = a_n + (-1)^n(n+1)$ για $n \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ ως ρητή συνάρτηση του x και βρείτε μια αναδρομική σχέση για την ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 14/2/2019 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία