252 Διακριτά Μαθηματικά
Εξετάσεις Ιανουαρίου 2022
Αθήνα 24/1/2022

Η εξέταση αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας σύντομα την απάντησή σας. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το πρώτο μέρος είναι οι 6 μονάδες.

Α1. Αν $a_0 = a_1 = 1$ και $a_n = (-1)^n(a_{n-1} + a_{n-2})$ για $n \geq 2$, τότε το a_6 ισούται με

(α) 3 (β) -3 (γ) 4 (δ) -4 (ε) 5 (στ) -5

Α2. Το πλήθος των μη κενών υποσυνόλων S του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ για τα οποία το μέγιστο στοιχείο του S είναι άρτιος αριθμός ισούται με

(α) 120 (β) 128 (γ) 144 (δ) 158 (ε) 170 (στ) 196

Α3. Το πλήθος των τρόπων να επιλεγεί πρώτα ένα υποσύνολο S του $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ με τέσσερα στοιχεία, να χρωματιστούν έπειτα δύο στοιχεία του S κόκκινα και τέλος να χρωματιστεί ένα από τα υπόλοιπα δύο στοιχεία του S πράσινο ισούται με

(α) 42 (β) 60 (γ) 90 (δ) 180 (ε) 360 (στ) 720

Α4. Ο συντελεστής του x^5 στο πολυώνυμο $(1 + 2x)(1 + x)^7$ είναι ίσος με

(α) 70 (β) 77 (γ) 84 (δ) 91 (ε) 98 (στ) 105

Α5. Το πλήθος των αναδιατάξεων $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$ του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ για τις οποίες $\sigma_1 \neq 2$ και $\sigma_3 \neq 4$ ισούται με

(α) 60 (β) 72 (γ) 78 (δ) 96 (ε) 120 (στ) 128

Α6. Το πλήθος των μονοπατιών στο $\mathbb{Z}^2$ που έχουν αρχή το σημείο $(0, 0)$, πέρας το σημείο $(6, 6)$, βήματα $(1, 0)$ ή $(0, 1)$ και διέρχονται από το σημείο $(2, 3)$ είναι ίσο με

(α) 45 (β) 120 (γ) 150 (δ) 175 (ε) 200 (στ) 350

Α7. Το πλήθος των 1–1 απεικονίσεων από το σύνολο των συνθέσεων του 10 με πέντε μέρη στο σύνολο των κυκλικών αναδιατάξεων του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ είναι ίσο με

(α) μηδέν (β) 120 (γ) 126 (δ) 720 (ε) $120 \cdot 126$ (στ) $126 \cdot 125 \cdot 124 \cdot 123 \cdot 122 \cdot 121$

Α8. Το σύνολο $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση της διαιρετότητας, έχει πλάτος ίσο με

(α) 1 (β) 2 (γ) 3 (δ) 4 (ε) 5 (στ) 6

A9. Το ελάχιστο πλήθος φύλλων που μπορεί να έχει ένα δένδρο με εννέα κορυφές, μία τουλάχιστον από τις οποίες έχει βαθμό 4, ισούται με

(α) 2 (β) 3 (γ) 4 (δ) 5 (ε) 6 (στ) 7

A10. Το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων ενός απλού γραφήματος με έξι κορυφές και χρωματικό αριθμό ίσο με 6

(α) ισούται με μηδέν (β) ισούται με 15 (γ) ισούται με 30 (δ) ισούται με 45 (ε) ισούται με 60 (στ) δεν καθορίζεται πλήρως από τα δεδομένα του προβλήματος

A11. Αν $a_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + 3 = 4$, κ.ο.κ., τότε η γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ισούται με

(α) $x/(1-2x)^2$ (β) $x(1+x)/(1-x)^2$ (γ) $x/(1-x)^3$ (δ) $x/(1-2x)^3$ (ε) $x(1+x)/(1-x)^3$ (στ) $x/(1-x)^4$

A12. Αν $\sum_{n \geq 0} a_n x^n = 1/(1-x)(1-2x)$, τότε το a_5 ισούται με

(α) 60 (β) 63 (γ) 66 (δ) 69 (ε) 72 (στ) 75

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το δεύτερο μέρος είναι οι 4 μονάδες.

B1.

(α) Έστω $a(n,k)$ το πλήθος των διανυσμάτων $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ με $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ και $x_i \in \{0, 1\}$ για κάθε i. Βρείτε έναν όσο το δυνατόν απλούστερο κλειστό τύπο για το $a(n,k)$, καθώς και για το άθροισμα
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+2}\, a(n,k).$$

(β) Έστω $f(n)$ το πλήθος των υποσυνόλων (συμπεριλαμβάνεται το κενό σύνολο) του $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, το άθροισμα των στοιχείων των οποίων είναι άρτιος αριθμός. Για παράδειγμα, $f(1) = 2$ και $f(2) = 8$. Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 1} f(n) x^n$ ως ρητή συνάρτηση του x.

B2. Θεωρούμε το απλό γράφημα G με σύνολο κορυφών $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και ακμές τις $\{0, 1\}$, $\{0, 3\}$, $\{0, 5\}$, $\{0, 7\}$ και τις $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}$.

(α) Είναι το G συνεκτικό; Είναι διπλά συνεκτικό;

(β) Υπολογίστε το χρωματικό αριθμό και το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του G.

Καλή Επιτυχία!