Διακριτά Μαθηματικά
Θέματα Εξετάσεων Φεβρουαρίου 2016

1. Δίνονται θετικοί ακέραιοι m, n.

(α) (5 μονάδες) Πόσες ακολουθίες $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ υπάρχουν με $\sigma_i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ για $1 \le i \le n$;

(β) (10 μονάδες) Πόσες ακολουθίες $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ υπάρχουν με $\sigma_i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ για $1 \le i \le n$ και $\sigma_i \ne \sigma_{i+1}$ για $1 \le i \le n-1$;

2. (15 μονάδες) Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n}{k-1} \binom{n-1}{k-1} \;=\; \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1}$$

για κάθε θετικό ακέραιο n.

3. Δίνονται τρεις όμοιες άσπρες μπάλλες, τρεις όμοιες κίτρινες μπάλλες και τέσσερις όμοιες μαύρες μπάλλες.

(α) (10 μονάδες) Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν γραμμικά οι μπάλλες αυτές; Για παράδειγμα, μια διάταξη είναι η (Κ, Α, Α, Μ, Κ, Μ, Μ, Μ, Κ, Α), όπου Α = άσπρη, Κ = κίτρινη και Μ = μαύρη.

(β) (15 μονάδες) Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν γραμμικά οι μπάλλες αν δεν πρέπει να υπάρχει χρώμα, όλες οι μπάλλες του οποίου να εμφανίζονται διαδοχικά στη διάταξη;

4. (15 μονάδες) Βρείτε όλους τους ακεραίους n για τους οποίους υπάρχει απλό επιπεδικό γράφημα με n κορυφές, καθεμιά από τις οποίες έχει βαθμό 3.

5. (15 μονάδες) Δίνεται ακέραιος $n \ge 3$. Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος ακμών που μπορεί να έχει ένα απλό, διπλά συνεκτικό γράφημα με n κορυφές;

6. (15 μονάδες) Για δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών (a_n) και (b_n), όπου $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, ισχύει

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \;=\; n 2^{n-1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν

$$\sum_{n \ge 0} b_n \frac{x^n}{n!} \;=\; x e^{-x},$$

υπολογίστε το a_n για $n \in \mathbb{N}$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 10/2/2016 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία