Βασική Άλγεβρα
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2019

1. $(1+1+1=3$ μονάδες$)$

(α) Να βρείτε όλα τα ιδεώδη I, J του δακτυλίου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων, που είναι τέτοια ώστε το κύριο ιδεώδες $\langle 36 \rangle$ των πολλαπλασίων του αριθμού $36 \in \mathbb{Z}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του I και το I είναι γνήσιο υποσύνολο του J.

(β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $X^{51} \in \mathbb{Z}_7[X]$ με το $X+4 \in \mathbb{Z}_7[X]$.

(γ) Να δείξετε ότι κάθε στοιχείο του δακτυλίου $\mathbb{Z}_{2019}$ είναι είτε μηδενοδιαιρέτης είτε αντιστρέψιμο στον $\mathbb{Z}_{2019}$.

2. $(1+1+1=3$ μονάδες$)$
Έστω $R = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\}$.

(α) Να δείξετε ότι ο R είναι ένας υποδακτύλιος του δακτυλίου των 2×2 μιγαδικών πινάκων και ότι για την ομάδα $U(R)$ των αντιστρέψιμων στοιχείων του R ισχύει ότι $U(R) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C}, z \neq 0 \right\}$.

(β) Να υπολογίσετε την τάξη $o(A)$ του στοιχείου $A \in U(R)$, όπου $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(γ) Να δείξετε ότι η $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : w \in \mathbb{C} \right\}$ είναι μια κανονική υποομάδα της $U(R)$, η οποία είναι ισόμορφη με την προσθετική ομάδα $(\mathbb{C}, +)$, και ότι η ομάδα πηλίκο $U(R)/H$ είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

3. $(1+1+1=3$ μονάδες$)$

(α) Έστω G μια ομάδα και $a, b \in G$ δύο στοιχεία της, που είναι τέτοια ώστε $ab = ba$ και $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\}$. Να δείξετε ότι $o(ab) = \text{εκπ}(o(a), o(b))$.

(β) Να βρείτε τις δυνατές τάξεις όλων των στοιχείων της ομάδας S_7 και, στη συνέχεια, να εξετάσετε αν υπάρχει μετάθεση $\sigma \in S_7$ με $\sigma^4 = (2\,1\,4\,3\,5\,6\,7)$.

(γ) Έστω $\tau = (1\,3\,5\,6)(2\,4\,7) \in S_7$. Να βρείτε τη μορφή όλων των ακεραίων αριθμών n, οι οποίοι είναι τέτοιοι ώστε η μετάθεση τ^n είναι ένας κύκλος μήκους 4.

4. $(0,5+1,5=2$ μονάδες$)$
Έστω G μια ομάδα και H, K δύο κανονικές υποομάδες της.

(α) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $f : G \longrightarrow G/H \times G/K$ με $f(g) = (gH, gK) \in G/H \times G/K$ για κάθε $g \in G$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων.

(β) Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $[G : H] = 13$ και $[G : K] = 31$, να αποδείξετε ότι υπάρχει κανονική υποομάδα N της G, η οποία περιέχεται γνήσια στην K και είναι τέτοια ώστε η ομάδα πηλίκο G/N είναι κυκλική.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία!