Βασική Άλγεβρα
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2014

1.

(α) (5 μονάδες) Υπολογίστε το πλήθος των $a \in \mathbb{Z}_{77}$ για τα οποία υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $a^k = 0_{\mathbb{Z}_{77}}$.

(β) (5 μονάδες) Υπολογίστε το πλήθος των $a \in \mathbb{Z}_{77}$ για τα οποία υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $a^k = 1_{\mathbb{Z}_{77}}$.

(γ) (10 μονάδες) Βρείτε τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους ισχύει $2^n \equiv 1 \bmod 77$.

2. Έστω $I = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] : f(1) = f(1-i) = 0\}$.

(α) (5 μονάδες) Δείξτε ότι το I είναι ιδεώδες του $\mathbb{R}[x]$.

(β) (10 μονάδες) Βρείτε μη μηδενικό $g(x) \in I$ ελάχιστου βαθμού.

(γ) (5 μονάδες) Αληθεύει ότι οι δακτύλιοι $R[x]/I$ και $R[x]$ είναι ισόμορφοι;

(δ) (10 μονάδες) Βρείτε τα $a \in \mathbb{R}$ για τα οποία το $x^4 + x + a + I$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του $\in R[x]/I$.

3. Έστω $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6)(1\,2\,3\,4\,8) \in S_8$.

(α) (10 μονάδες) Βρείτε μια παράσταση της σ^{10} ως γινόμενο ξένων ανά δύο κύκλων.

(β) (10 μονάδες) Δείξτε ότι δεν υπάρχει $\tau \in S_8$ έτσι ώστε $\tau^3 = \sigma$.

(γ) (10 μονάδες) Αληθεύει ότι η υποομάδα $\langle \sigma \rangle$ της S_8 είναι κανονική; Υπόδειξη: $\sigma(7) = 7$.

4. Έστω G ομάδα τέτοια ώστε $|G| \leq 60$ και έστω ότι υπάρχουν στοιχεία $a, b \in G$ με τάξεις 2 και 17, αντίστοιχα.

(α) (5 μονάδες) Βρείτε την τάξη της G.

(β) (5 μονάδες) Βρείτε αντιπροσώπους των αριστερών κλάσεων της υποομάδας $\langle b \rangle$ στη G.

(γ) (10 μονάδες) Δείξτε οτι αν $ab = ba$, τότε η G είναι κυκλική. Στην περίπτωση αυτή καταγράψτε όλες τις υποομάδες της G.

(δ) (10 μονάδες) Δείξτε οτι αν $\varphi : G \to S_8$ είναι ομομορφισμός ομάδων, τότε $b \in \ker(\varphi)$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 22/9/2014 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία