Βασική Άλγεβρα
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2010

1. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος (δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας);

(α) Υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο a του δακτυλίου $\mathbb{Z}_{30}$ με $a^2 = 0$.

(β) Υπάρχει ανάγωγο πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ βαθμού 2.

(γ) Υπάρχει υποομάδα της συμμετρικής ομάδας S_6 με τάξη 7.

(δ) Αν κάθε γνήσια υποομάδα μιας ομάδας G είναι κυκλική, τότε η ομάδα G είναι επίσης κυκλική.

(ε) Η ομάδα $U(\mathbb{Z}_{10})$ των αντιστρέψιμων στοιχείων του δακτυλίου $\mathbb{Z}_{10}$ είναι κυκλική.

(στ) Η τομή δύο οποιωνδήποτε κανονικών υποομάδων μιας ομάδας G είναι επίσης κανονική υποομάδα της G.

2. Θεωρούμε το δακτύλιο $M_2(\mathbb{Z}_{11})$ των 2×2 πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{Z}_{11}$ και τα στοιχεία $A, B \in M_2(\mathbb{Z}_{11})$ με $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(α) Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί η τάξη του στην πολλαπλασιαστική ομάδα $GL_2(\mathbb{Z}_{11})$ των αντιστρέψιμων 2×2 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{Z}_{11}$.

(β) Ομοίως για τον πίνακα B.

3. Θεωρούμε το δακτύλιο πηλίκο $R = \mathbb{Z}_3[x]/J$, όπου $J = \langle x^4 + 1 \rangle$ είναι το κύριο ιδεώδες του $\mathbb{Z}_3[x]$ που παράγεται από το πολυώνυμο $x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

(α) Να βρεθούν $a, b \in \mathbb{Z}_3$ τέτοια ώστα να ισχύει $x^4 + 1 = (x^2 + ax - 1)(x^2 + bx - 1)$ στο $\mathbb{Z}_3[x]$ και να αναλυθεί το $x^4 + 1$ σε γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων στο $\mathbb{Z}_3[x]$.

(β) Έστω πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$. Να δειχθεί ότι το στοιχείο $f(x) + J$ του R είναι αντιστρέψιμο αν και μόνο αν $\mu\kappa\delta(f(x), x^4 + 1) = 1$.

(γ) Να υπολογίσετε την τάξη της ομάδας $U(R)$ των αντιστρέψιμων στοιχείων του R.

4. Έστω η μετάθεση $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9) \in S_9$ και έστω H η κυκλική υποομάδα της S_9 που παράγεται από τη σ.

(α) Να γραφεί η μετάθεση σ^{2010} ως γινόμενο ξένων κύκλων.

(β) Να βρεθούν όλες οι υποομάδες της H τάξης 3.

(γ) Να βρεθεί μετάθεση $\tau \in S_9$ με την ιδιότητα $\tau^2 = \sigma$.

(δ) Να βρεθούν όλες οι μεταθέσεις $\tau \in S_9$ με την ιδιότητα $\tau^2 = \sigma$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 22/10/2010 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία