ΒΑΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2009

Ομάδα Α

Θέμα 1. (2.5 μονάδες)
Έστω $a, b \in \mathbf{Z}$ δύο μη μηδενικοί ακέραιοι και $I \subseteq \mathbf{Z}$ το σύνολο που ορίζεται θέτοντας

$$I = \{ax + by : x, y \in \mathbf{Z}\}.$$

(i) Δείξτε ότι το I είναι ιδεώδες του $\mathbf{Z}$.

(ii) Δείξτε ότι το I είτε περιέχει όλους τους πρώτους αριθμούς, είτε περιέχει μόνο έναν πρώτο αριθμό, είτε δεν περιέχει κανέναν πρώτο αριθμό.

(iii) Σε ποιες από τις τρεις περιπτώσεις που αναφέρονται στο (ii) είναι ο δακτύλιος πηλίκο $\mathbf{Z}/I$ ακέραια περιοχή;

Θέμα 2. (2.5 μονάδες)
Έστω p ένας πρώτος αριθμός και $f(X) = (X^2 + X + 1)^p - (X^2 + X + 1) \in \mathbf{Z}_p[X]$.

(i) Δείξτε ότι κάθε στοιχείο του $\mathbf{Z}_p$ είναι ρίζα του $f(X)$ και συμπεράνετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο $q(X) \in \mathbf{Z}_p[X]$, τέτοιο ώστε $f(X) = (X^p - X)q(X)$.

(ii) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $q(X)$ που αναφέρεται στο (i);

(iii) Να αναλύσετε το $f(X)$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στο $\mathbf{Z}_p[X]$ για $p = 2$ και $p = 3$.

Θέμα 3. (2.5 μονάδες)
Έστω $\sigma \in S_{14}$ μια μετάθεση με τάξη $o(\sigma) = 22$.

(i) Είναι άρτια ή περιττή η μετάθεση σ; Εξηγήστε.

(ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο $i \in \{1, 2, \ldots, 14\}$ με $\sigma(i) = i$.

(iii) Αν $\sigma' \in S_{14}$ είναι μια άλλη μετάθεση με τάξη $o(\sigma') = 22$, να δείξετε ότι υπάρχει μετάθεση $\tau \in S_{14}$, τέτοια ώστε $\sigma\tau = \tau\sigma'$.

Θέμα 4. (2.5 μονάδες)
Έστω $N = <a>$ μια άπειρη κυκλική ομάδα.

(i) Αν $f : N \longrightarrow N$ είναι ένας αυτομορφισμός της N (δηλαδή, η f είναι ομομορφισμός, 1-1 και επί), να δείξετε ότι $f(a) = a^\varepsilon$, όπου $\varepsilon = 1$ ή $\varepsilon = -1$, και να συμπεράνετε ότι $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in N$.

(ii) Υποθέτουμε ότι η N είναι κανονική υποομάδα μιας ομάδας G. Να δείξετε ότι $g^2 a = a g^2$ για κάθε $g \in G$.