

Βασική Άλγεβρα
Θέματα Εξετάσεων Ιανουαρίου 2018

1. Δίνεται το σύνολο $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

(α) Δείξτε ότι το R είναι υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{Z})$.

(β) Είναι η απεικόνιση $\varphi : R \rightarrow \mathbb{Z}$ με $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a + b$ ομομορφισμός δακτυλίων;

(γ) Υπάρχει επιμορφισμός δακτυλίων $\psi : R \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

2. Δίνεται το πολυώνυμο $x^4 + x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]$, το κύριο ιδεώδες $I = \langle x^4 + x^2 \rangle \subseteq \mathbb{Z}_2[x]$ και ο δακτύλιος πηλίκο $R = \mathbb{Z}_2[x]/I$.

(α) Υπολογίστε το πλήθος των στοιχείων του δακτυλίου R και την τάξη της ομάδας $U(R)$ των αντιστρέψιμων στοιχείων του.

(β) Αν το πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ δεν έχει ρίζες στο σώμα \mathbb{Z}_2 και $\xi \in R$ είναι η κλάση του $f(x)$ στο πηλίκο, δείξτε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $\xi^n = 1 \in R$.

(γ) Αν $\zeta \in R$ είναι η κλάση του πολυωνύμου $g(x) = x^{27} + x^9 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ στο πηλίκο, δείξτε ότι $\zeta^n \neq 1 \in R$ για κάθε θετικό ακέραιο n .

3. Δίνονται ομάδα G τάξης $|G| \leq 140$ και υποομάδες H και K της G τάξεων $|H| = 8$ και $|K| = 9$.

(α) Υπολογίστε την τάξη της G .

(β) Δείξτε ότι $[G : H \cap K] = [G : H][G : K]$.

(γ) Δείξτε ότι κάθε $x \in G$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $x = ab$, με $a \in H$ και $b \in K$.

4. Δίνεται η μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & u & 1 & v & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_8$, όπου $u, v \in \{3, 5\}$.

Υποθέτουμε ότι η μετάθεση σ^{2018} είναι γεννήτορας της κυκλικής υποομάδας $\langle \sigma \rangle$ της S_8 που παράγεται από τη σ .

(α) Βρείτε τις τιμές των u και v .

(β) Δείξτε ότι υπάρχει $w \in S_8$ τέτοια ώστε $\sigma^2 = w\sigma w^{-1}$.

(γ) Δείξτε ότι για κάθε αβελιανή ομάδα A και κάθε ομομορφισμό ομάδων $\varphi : S_8 \rightarrow A$ ισχύει ότι $\langle \sigma \rangle \subseteq \ker(\varphi)$.

Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 2/2/2018 – Καλή Επιτυχία