ΒΑΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2017

Θεμα 1. $(1 + 1 = 2$ μονάδες)

(α) Να βρείτε όλα τα στοιχεία $a \in \mathbf{Z}_{64}$, που είναι τέτοια ώστε $a^{2017} = 1 \in \mathbf{Z}_{64}$.

(β) Να εξετάσετε αν η πολλαπλασιαστική ομάδα $U(\mathbf{Z}_{20})$ των αντιστρέψιμων στοιχείων του δακτυλίου $\mathbf{Z}_{20}$ είναι κυκλική.

Θεμα 2. $(1 + 1 + 1 = 3$ μονάδες)

Θεωρούμε έναν πρώτο αριθμό p και τα πολυώνυμα $f(x), g(x) \in \mathbf{Z}_p[x]$, όπου

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x \quad \text{και} \quad g(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1.$$

Θεωρούμε επίσης το ιδεώδες $I = \{a(x)f(x) + b(x)g(x) : a(x), b(x) \in \mathbf{Z}_p[x]\}$ του $\mathbf{Z}_p[x]$.

(α) Να υπολογίσετε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη $d(x)$ των πολυωνύμων $f(x)$ και $g(x)$, για τις διάφορες τιμές του πρώτου αριθμού p.

(β) Για ποιους πρώτους αριθμούς p είναι ο δακτύλιος πηλίκο $\mathbf{Z}_p[x]/I$ σώμα;

(γ) Να βρείτε το πλήθος των πολυωνύμων $h(x) \in \mathbf{Z}_p[x]$, που είναι τέτοια ώστε $I = \langle h(x) \rangle$.

Θέμα 3. $(1 + 1 + 1 = 3$ μονάδες)

Θεωρούμε τις μεταθέσεις $\sigma, \tau \in S_9$, όπου

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 8 & 9 & 2 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & 9 & 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

και τις κυκλικές υποομάδες $H = \langle \sigma \rangle$ και $K = \langle \tau \rangle$ της S_9.

(α) Να εξετάσετε αν οι ομάδες H και K είναι ισόμορφες.

(β) Για ποιους πρώτους αριθμούς p είναι η μετάθεση σ^p γεννήτορας της ομάδας H;

(γ) Να εξετάσετε αν η K είναι κανονική υποομάδα της S_9.

Θέμα 4. $(1 + 1 + 1 = 3$ μονάδες)

Θεωρούμε έναν περιττό πρώτο αριθμό p και μια πεπερασμένη ομάδα G, η οποία έχει μια υποομάδα N τάξης 2 και μια υποομάδα K τάξης p.

(α) Να δείξετε ότι $|G| \geq 2p$.

(β) Να δώσετε ένα παράδειγμα μιας τέτοιας ομάδας G τάξης $2p$, η οποία δεν είναι κυκλική.

(γ) Αν $|G| = 2p$ και η N είναι κανονική υποομάδα της G, να δείξετε ότι η G είναι κυκλική.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή επιτυχία!