Βασική Άλγεβρα
Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2014

1. Έστω $a \in \mathbb{Z}_3$ και $f(x) = x^3 + x^2 + ax + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

(α) Βρείτε όλα τα $a \in \mathbb{Z}_3$ για τα οποία ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_3[x]/\langle f(x) \rangle$ είναι σώμα.

(β) Για $a = 2 \in \mathbb{Z}_3$ εξετάστε αν το στοιχείο $g(x) + \langle f(x) \rangle \in \mathbb{Z}_3[x]/\langle f(x) \rangle$ είναι αντιστρέψιμο, όπου $g(x) = x^4 + 2x^3 + x$, και υπολογίστε το αντίστροφο εφόσον υπάρχει.

2. Δίνεται πεπερασμένη ομάδα G που έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο τάξης 4, τουλάχιστον ένα στοιχείο τάξης 5 και τουλάχιστον ένα στοιχείο τάξης 6.

(α) Δείξτε ότι $|G| \geq 60$. Δώστε παράδειγμα τέτοιας ομάδας με τάξη $|G| = 60$.

(β) Δείξτε ότι η G έχει στοιχείο τάξης 3.

(γ) Δώστε παράδειγμα τέτοιας ομάδας G που δεν έχει στοιχεία τάξης 12.

3. Έστω p πρώτος και $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$.

(α) Δείξτε ότι το R είναι υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{Z}_p)$ και ότι δεν είναι ιδεώδες του $M_2(\mathbb{Z}_p)$.

(β) Δείξτε ότι το σύνολο $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{Z}_p \right\}$ είναι ιδεώδες του R και ότι ο δακτύλιος R/I είναι ισόμορφος με το $\mathbb{Z}_p$.

(γ) Πόσα στοιχεία του R είναι αντιστρέψιμα;

(δ) Έστω ότι $p > 2$. Θεωρούμε το στοιχείο $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in U(R)$, όπου $U(R)$ είναι η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του R. Δείξτε ότι η τάξη του A στην $U(R)$ διαιρεί το $p - 1$.

4. Έστω $\sigma = (1\,2\,3\,5\,7)(1\,2\,4\,6) \in S_7$.

(α) Βρείτε την ανάλυση της σ^{50} σε γινόμενο ξένων ανά δύο κύκλων.

(β) Βρείτε όλους τους ακεραίους k για τους οποίους η σ^k είναι κύκλος μήκους 3.

(γ) Έστω ομάδα G και κυκλική υποομάδα H η οποία είναι κανονική υποομάδα της G. Δείξτε ότι κάθε υποομάδα της H είναι κανονική υποομάδα της G.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 1/4/2014 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία