ΒΑΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Θέματα Φεβρουαρίου 2010

Α

1. Για καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις αποφανθείτε αν είναι σωστή ή λάθος. Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι πλήρως δικαιολογημένες.

(α) Οι δακτύλιοι $\mathbb{Z}_{32}$ και $\mathbb{Z}_{60}$ έχουν το ίδιο πλήθος αντιστρέψιμων στοιχείων.

(β) Η απεικόνιση $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ με $\phi(a + b\mathrm{i}) = a$ για $a, b \in \mathbb{R}$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

(γ) Η ένωση δύο οποιονδήποτε ιδεωδών του δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$ είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z}[x]$.

(δ) Δεν υπάρχει στοιχείο της συμμετρικής ομάδας S_5 το οποίο να έχει τάξη μεγαλύτερη του 5.

(ε) Η τομή δύο οποιονδήποτε κυκλικών υποομάδων μιας ομάδας G είναι επίσης κυκλική υποομάδα της G.

(στ) Υπάρχει μοναδικό ανάγωγο πολυώνυμο $f(x)$ του $\mathbb{Z}_2[x]$ τέτοιο ώστε $f(1) = 0$.

2. Δίνεται το πολυώνυμο $g(x) = x^2 + x + 1$ του $\mathbb{Z}_3[x]$ και ο δακτύλιος πηλίκο $R = \mathbb{Z}_3[x]/\langle g(x)\rangle$.

(α) Να αναλύσετε το $g(x)$ σε γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων του $\mathbb{Z}_3[x]$.

(β) Πόσα στοιχεία έχει ο δακτύλιος R;

(γ) Να δείξετε ότι το $-x + \langle g(x)\rangle$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R και να υπολογίσετε την τάξη του στοιχείου αυτού στην ομάδα $U(R)$ των αντιστρέψιμων στοιχείων του R.

3. Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x) = x^4 - 1$ και $g(x) = x^9 - 1$ του $\mathbb{C}[x]$.

(α) Να υπολογίσετε το μέγιστο κοινό διαιρέτη $d(x)$ των $f(x)$ και $g(x)$ και να βρείτε πολυώνυμα $\lambda(x), \mu(x) \in \mathbb{C}[x]$ τέτοια ώστε $d(x) = \lambda(x)f(x) + \mu(x)g(x)$.

(β) Να βρείτε πολυώνυμα $\alpha(x), \beta(x) \in \mathbb{C}[x]$ τέτοια ώστε $x^{2010} - 1 = \alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x)$.

(γ) Να δείξετε ότι το σύνολο G των μιγαδικών ριζών του $g(x)$ αποτελεί ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό των μιγαδικών αριθμών.

(δ) Να υπολογίσετε την τάξη της ομάδας G και να δείξετε ότι αυτή έχει μία τουλάχιστον υποομάδα διαφορετική από τις τετριμμένες υποομάδες $\{1\}$ και G.

4. Δίνεται η κυκλική μετάθεση $\tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10) \in S_{10}$.

(α) Να γράψετε τις μεταθέσεις τ^2 και τ^5 ως γινόμενα ξένων κύκλων.

(β) Ποιες από τις μεταθέσεις τ^k για $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ έχουν τάξη ίση με 5;

(γ) Να αποφανθείτε αν η μετάθεση τ είναι άρτια ή περιττή και να δείξετε ότι δεν υπάρχει μετάθεση $\sigma \in S_{10}$ τέτοια ώστε $\sigma^2 = \tau$.