

ΒΑΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2009

Ομάδα Α

Θέμα 1. Έστω R ο δακτύλιος των άνω τριγωνικών 3×3 μιγαδικών πινάκων και $S, I \subseteq R$ με

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbf{C} \right\} \quad \text{και} \quad I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : d \in \mathbf{C} \right\}.$$

- (i) Ναδειχτεί ότι ο S είναι ένας υποδακτύλιος του R . Είναι ο δακτύλιος S μεταθετικός;
- (ii) Ναδειχτεί ότι το I είναι ένα ιδεώδες του S . Είναι το I ένα ιδεώδες του R ;
- (iii) Ναδειχτεί ότι υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων $S/I \simeq \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

Θέμα 2.

(i) Έστω $a \in \mathbf{R}$ ένας πραγματικός αριθμός και $\varphi_a : \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}$ ο ομομορφισμός δακτυλίων που ορίζεται θέτοντας $\varphi_a(f(X)) = f(a)$ για κάθε $f(X) \in \mathbf{R}[X]$. Να δείξετε ότι ο φ_a είναι επί αλλά όχι 1-1.

(ii) Να εξετάσετε αν οι δακτύλιοι $\mathbf{R}[X]/(X-2)$ και $\mathbf{R}[X]/(X-\sqrt{2})$ είναι ισόμορφοι.

(iii) Να εξετάσετε αν οι δακτύλιοι $\mathbf{R}[X]/(X-2)$ και $\mathbf{R}[X]/(X^2-2)$ είναι ισόμορφοι.

Θέμα 3. Έστω $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 1 & 7 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in S_8$, $\tau = \sigma^{2009}$ και $H = \langle \sigma \rangle$ η κυκλική υποομάδα της S_8 που παράγεται από το σ .

(i) Να εκφράσετε τη μετάθεση σ ως γινόμενο ξένων ανά δύο κύκλων και να βρείτε την τάξη της σ .

(ii) Να εξετάσετε αν η μετάθεση τ είναι άρτια και να υπολογίσετε τα $\tau(1)$ και $\tau(6)$.

(iii) Να εξετάσετε αν υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $f : S_8 \rightarrow S_8$ με $\ker f = H$.

Θέμα 4. Έστω $G = U(\mathbf{Z}_{18})$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του δακτυλίου \mathbf{Z}_{18} .

(i) Να γράψετε όλα τα στοιχεία της ομάδας G και να βρείτε την τάξη της.

(ii) Είναι η ομάδα G κυκλική;

(iii) Έστω $n \in \mathbf{Z}$ ένας ακέραιος και $f_n : G \rightarrow G$ ο ομομορφισμός ομάδων με $f_n(g) = g^n$ για κάθε $g \in G$. Να βρείτε όλες τις τιμές του n για τις οποίες η απεικόνιση f_n είναι 1-1.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2.5 ώρες.

Καλή επιτυχία!