ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2022
Ασκήσεις #1

1. Για ποιες τυπικές δυναμοσειρές $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ υπάρχει τυπική δυναμοσειρά $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $(F(x))^3 = G(x)$; Θεωρήστε γνωστό το γεγονός ότι η εξίσωση $z^3 = a$ έχει λύση στο $\mathbb{C}$ για κάθε $a \in \mathbb{C}$.

2. Δίνεται η τυπική δυναμοσειρά $F(x) = \sum_{k \ge 0} (x + x^2 - x^3)^k \in \mathbb{C}[[x]]$.

(α) Υπολογίστε την $F(x)$ ως ρητή συνάρτηση του x.

(β) Δείξτε ότι οι συντελεστές της $F(x)$ είναι θετικοί ακέραιοι.

(γ) Υπολογίστε το συντελεστή του x^n στην $(F(x))^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3. Έστω m θετικός ακέραιος και έστω $c(n, m)$ το πλήθος των συνθέσεων του n με μέρη περιττούς ακεραίους $\le 2m - 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n \ge 0} c(n, m) x^n = \frac{1 - x^2}{1 - x - x^2 + x^{2m+1}},$$

όπου $c(0, m) = 1$ κατά σύμβαση.

4. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n, το πλήθος των διαμερίσεων λ του n κανένα μέρος των οποίων δεν εμφανίζεται με πολλαπλότητα ένα στη λ ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων του n με μέρη διάφορα του $\pm 1 \pmod 6$.

5. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο

$$\mathcal{A}_n = \{1\} \times \{1, 2\} \times \cdots \times \{1, 2, \ldots, n\}$$

και για $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}_n$ ορίζουμε το σύνολο των καθόδων $\mathrm{Des}(\sigma) := \{i \in [n-1] : a_i \ge a_{i+1}\}$ της σ.

(α) Δείξτε ότι το πλήθος των ακολουθιών $\sigma \in \mathcal{A}_n$ με σύνολο των καθόδων $\mathrm{Des}(\sigma) = S$ ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ με σύνολο των καθόδων $\mathrm{Des}(w) = S$ για κάθε $S \subseteq [n-1]$.

(β) Συμπεράνετε ότι

$$A_n(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} x^{\mathrm{des}(\sigma)}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, όπου $\mathrm{des}(\sigma)$ είναι το πλήθος των καθόδων της $\sigma \in \mathcal{A}_n$ και $A_n(x) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{des}(w)}$.

Προθεσμία: Κυριακή 23 Οκτωβρίου

Ασκήσεις #2

6. Με πόσους τρόπους μπορεί κανείς να επιλέξει μια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ και να χρωματίσει κάθε έναν από τους ακεραίους $1, 2, \ldots, n$ άσπρο, πράσινο ή κόκκινο, έτσι ώστε το ελάχιστο στοιχείο κάθε κύκλου της w να είναι άσπρο; Εκφράστε την απάντησή σας ως μια όσο το δυνατόν πιο απλή συνάρτηση του n.

7. Για ακεραίους $1 \le k < n$, βρείτε έναν όσο το δυνατόν απλούστερο τύπο για το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ με σύνολο καθόδων $\mathrm{Des}(w) = \{k\}$ και μια όσο το δυνατόν απλούστερη απόδειξη του τύπου αυτού.

8. Θεωρούμε τις τυπικές δυναμοσειρές $R(x) = \sum_{n \ge 1} r(n) \frac{x^n}{n!}$, όπου $r(n)$ είναι το πλήθος των ριζωμένων δένδρων στο σύνολο κορυφών $[n]$, και $T(x) = R(x)/x$.

(α) Δείξτε ότι $T(x) = \sum_{n \ge 0} (n+1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}$.

(β) Δείξτε ότι
$$T(x) \ = \ \left(1 - \sum_{n \ge 1} (n-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} \right)^{-1},$$
όπου $(n-1)^{n-1} := 1$ για $n = 1$. *Υπόδειξη*: Εφαρμόστε το Θεώρημα αντιστροφής του Lagrange.

9. Θεωρούμε πεπερασμένο σύνολο V και αριθμούς $\alpha(F) \in \mathbb{C}$ για $F \subseteq V$. Ορίζουμε τους αριθμούς
$$\beta(G, E) \ = \sum_{E \subseteq F \subseteq G} (-1)^{|G \smallsetminus F|} \alpha(F)$$
για $E \subseteq G \subseteq V$ και θέτουμε $\beta(F) = \beta(F, \varnothing)$ για $F \subseteq V$.

(α) Για δοσμένα $E \subseteq G \subseteq V$, δείξτε ότι $\alpha(G) = \sum_{E \subseteq F \subseteq G} \beta(F, E)$.

(β) Δείξτε ότι $\beta(V, E) = \sum_{(V \smallsetminus E) \subseteq F} \beta(F)$ για κάθε $E \subseteq V$.

10. Θεωρούμε μερικώς διατεταγμένα σύνολα P, Q και το ευθύ γινόμενό τους $P \times Q$.

(α) Αν τα P και Q είναι αυτοδυϊκά, δείξτε ότι το ίδιο ισχύει για το $P \times Q$.

(β) Ισχύει το αντίστροφο; Δηλαδή, αν το $P \times Q$ είναι αυτοδυϊκό, είναι υποχρεωτικά τα P και Q αυτοδυϊκά;

Προθεσμία: Κυριακή 6 Νοεμβρίου

Ασκήσεις #3

11. Για μεταθέσεις $u, v \in \mathfrak{S}_n$ γράφουμε $u \preceq v$ αν κάθε κύκλος της u προκύπτει διαγράφοντας κάποια από τα στοιχεία κάποιου κύκλου της v. Για παράδειγμα, για $n = 5$ έχουμε $(1\ 2)\,(3\ 4\ 5) \preceq (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ αλλά $(1\ 2)\,(3\ 5\ 4) \not\preceq (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$.

(α) Δείξτε ότι η $\preceq$ αποτελεί διαβαθμισμένη μερική διάταξη τάξης $n-1$ επί της $\mathfrak{S}_n$.

(β) Σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse της $\preceq$ για $n = 3$.

(γ) Δείξτε ότι η εξίσωση $F(\mathfrak{S}_n, x) = 0$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες, όπου $F(\mathfrak{S}_n, x)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της τάξης του $(\mathfrak{S}_n, \preceq)$.

12. Δίνεται πεπερασμένος σύνδεσμος L και θετικός ακέραιος m. Εφαρμόζοντας το θεώρημα αντιστροφής Möbius ή με άλλο τρόπο, δείξτε ότι το πλήθος των ακολουθιών $(t_1, t_2, \dots, t_m) \in L^m$ με $t_1 \wedge t_2 \wedge \cdots \wedge t_m = \hat{0}$ είναι ίσο με

$$\sum_{x \in L} \mu_L(\hat{0}, x)\, (\# L_{\geq x})^m,$$

όπου $L_{\geq x} = \{y \in L : y \geq x\}$ για $x \in L$.

13. Δίνεται πεπερασμένος semimodular σύνδεσμος L. Δείξτε ότι ο σύνδεσμος L είναι γεωμετρικός αν και μόνο αν $\mu_L(x, y) \neq 0$ για όλα τα $x, y \in L$ με $x \leq_L y$.

14. Έστω ο σύνδεσμος Π_n των διαμερίσεων του συνόλου $[n]$. Για $\tau \in \Pi_n$ υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{\sigma \in [\hat{0}, \tau]} |\sigma| \cdot \mu_{\Pi_n}(\hat{0}, \sigma),$$

όπου $|\sigma|$ είναι το πλήθος των μερών της $\sigma \in \Pi_n$.

15. Για ακεραίους $1 \leq k \leq n$ θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$, με συντεταγμένες $x_1, x_2, \dots, x_n$, και το παράταγμα $\mathcal{A}_{n,k}$ των υπερεπιπέδων του $\mathbb{R}^n$ που ορίζονται από τις εξισώσεις

$$\begin{array}{ll} x_i = 0, & 1 \leq i \leq n, \\ x_i - x_j = 0, & 1 \leq i < j \leq k. \end{array}$$

Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και το πλήθος των περιοχών του $\mathcal{A}_{n,k}$.

Προθεσμία: Κυριακή 27 Νοεμβρίου

Ασκήσεις #4

16. Δίνεται ουσιώδες παράταγμα $\mathcal{A}$ γραμμικών υπερεπιπέδων στο χώρο $\mathbb{R}^n$ και $H \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε υπερεπίπεδο H_0 του $\mathbb{R}^n$ παράλληλο προς H (που δε συμπίπτει με αυτό) και το παράταγμα $\mathcal{A}_0$ των υπερεπιπέδων $H' \cap H_0$ για $H' \in \mathcal{A} \smallsetminus \{H\}$ στο χώρο H_0.

(α) Δείξτε ότι $\chi(\mathcal{A}, q) = (q-1)\chi(\mathcal{A}_0, q)$.

(β) Συνάγετε ότι το πλήθος των φραγμένων περιοχών του $\mathcal{A} \cup \{H_0\}$ ισούται με $(-1)^{n-1}\chi'(\mathcal{A}, 1)$, όπου $\chi'(\mathcal{A}, q)$ είναι η παράγωγος του $\chi(\mathcal{A}, q)$ ως προς q, και επομένως ότι είναι ανεξάρτητο της επιλογής του $H \in \mathcal{A}$.

17. Έστω ακέραιος $n \geq 2$ και έστω L_n το σύνολο των διαμερίσεων π του συνόλου $[n]$ που έχουν εξής ιδιότητα: αν $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ είναι μέρος της π με $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$, τότε $a_i - a_{i-1} \leq 2$ για κάθε $i \in \{2, 3, \ldots, p\}$. Θεωρούμε το L_n μερικώς διατεταγμένο με τη διάταξη που επάγεται από το σύνδεσμο Π_n όλων των διαμερίσεων του $[n]$.

(α) Δείξτε ότι το L_n είναι γεωμετρικός σύνδεσμος.

(β) Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του L_n και τον αριθμό $\mu_{L_n}(\hat{0}, \hat{1})$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 13.21 των διαλέξεων.

18. Δοσμένων ακεραίων $1 \leq k \leq n$, θεωρούμε το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\Delta_{n,k}$ που αποτελείται από τα υποσύνολα του $\{1, 2, \ldots, n\}$ με όχι περισσότερα από k στοιχεία.

(α) Δείξτε ότι το σύμπλεγμα $\Delta_{n,k}$ είναι αγνό και αποφλοιώσιμο.

(β) Υπολογίστε την ανηγμένη χαρακτηριστική Euler του $\Delta_{n,k}$.

19. Θεωρούμε πεπερασμένες (μη κενές) αντιαλυσίδες $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ με $a_1, a_2, \ldots, a_m$ στοιχεία, αντίστοιχα, το διατακτικό άθροισμα $P = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \cdots \oplus Q_m$ και το σύμπλεγμα της διάταξης $\Delta = \Delta(P)$.

(α) Δείξτε ότι το σύμπλεγμα Δ είναι αγνό και αποφλοιώσιμο.

(β) Υπολογίστε το $h(\Delta, x)$ και την ανηγμένη χαρακτηριστική Euler του Δ.

20. Σωστό ή λάθος; Για πεπερασμένες, διαβαθμισμένες μερικές διατάξεις P και Q με ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο, το διατακτικό άθροισμα $(P \smallsetminus \{\hat{1}_P\}) \oplus (Q \smallsetminus \{\hat{0}_Q\})$ είναι μερική διάταξη του Euler αν και μόνο αν οι P και Q είναι μερικές διατάξεις του Euler.

Προθεσμία: Κυριακή 18 Δεκεμβρίου

Ασκήσεις #5

21. Σωστό ή λάθος; Αν Δ είναι μονοπλεκτικό σύμπλεγμα διάστασης $d-1$ και $h(\Delta, x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^d$, τότε το Δ αποτελείται από τα γνήσια υποσύνολα ενός συνόλου με $d+1$ στοιχεία.

22. Έστω P η ξένη ένωση k αλυσίδων με $n_1, n_2, \ldots, n_k$ στοιχεία, αντίστοιχα.

(α) Υπολογίστε το πολυώνυμο της διάταξης $\Omega(P, m)$.

(β) Υπολογίστε το πλήθος $e(P)$ των γραμμικών επεκτάσεων της P με δύο τρόπους: εφαρμόζοντας το (α) και ευθέως, από τον ορισμό της γραμμικής επέκτασης.

23. Δίνεται θετικός ακέραιος n. Για $S \subseteq [n-1]$ θεωρούμε τη μερική διάταξη P_S στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$ η οποία έχει τις εξής $n-1$ σχέσεις κάλυψης: το $i \in [n-1]$ καλύπτει (αντίστοιχα, καλύπτεται από) το $i+1$ αν $i \in S$ (αντίστοιχα, αν $i \in [n-1] \smallsetminus S$).

(α) Δείξτε ότι το πλήθος των γραμμικών επεκτάσεων της P_S είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ με σύνολο καθόδων S.

(β) Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{S \subseteq [n-1]} \Omega(P_S, m)$.

24. Έστω μερική διάταξη P με n στοιχεία και φυσική επιγραφή ω και έστω ότι

$$\sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} x^{\mathrm{des}(w)} \ = \ h_0 + h_1 x + \cdots + h_d x^d,$$

όπου $h_d \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι $h_i \geq \binom{d}{i}$ για $0 \leq i \leq d$.

(β) Για $d \leq n/2$, δώστε παράδειγμα τέτοιου P με $h_i = \binom{d}{i}$ για $0 \leq i \leq d$.

25. Έστω $\mathcal{T}_n$ το σύνολο των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_{2n}$ για τις οποίες $w^{-1}(2i-1) < w^{-1}(2i)$ για $i \in [n]$ (δηλαδή, το $2i-1$ εμφανίζεται στα αριστερά του $2i$ στη γραμμική παράσταση της w).

(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{m \geq 1} \binom{m+1}{2}^n x^{m-1} \ = \ \frac{\sum_{w \in \mathcal{T}_n} x^{\mathrm{des}(w)}}{(1-x)^{2n+1}}$$

και συνάγετε ότι

$$\sum_{w \in \mathcal{T}_n} x^{\mathrm{des}(w)} \ = \ \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} A_{n+k}(x),$$

όπου $A_m(x)$ είναι το m-οστό πολυώνυμο του Euler.

(β) Δείξτε ότι

$$\sum_{w \in \mathcal{T}_n} x^{\mathrm{maj}(w)} \; = \; \prod_{i=1}^{n} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{2i-2}) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2i-2}).$$

Προθεσμία: Κυριακή 15 Ιανουαρίου