

Αλγεβρική Συνδυαστική
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2021

1. (10 μονάδες) Σωστό ή λάθος; Υπάρχει τυπική δυναμοσειρά $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε

$$(F(x))^3 = \left(\frac{x}{1-x^3} \right)^2$$

στο $\mathbb{C}[[x]]$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

2. Δίνεται απλό γράφημα G με πίνακα γειτνίασης $A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(α) (10 μονάδες) Πόσες κορυφές και πόσες ακμές έχει το G ;

(β) (5 μονάδες) Πόσα παράγοντα δένδρα έχει το G ;

(γ) (10 μονάδες) Πόσους κλειστούς περιπάτους μήκους 2 και πόσους μήκους 3 έχει το G ;

(δ) (10 μονάδες) Έστω $f_G(m)$ το πλήθος των κλειστών περιπάτων μήκους m στο G . Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{m \geq 0} f_G(m)x^m$ ως ρητή συνάρτηση του x .

3. (10 μονάδες) Χρωματίζουμε κάθε ακμή και κάθε διαγώνιο ενός κανονικού πενταγώνου με άσπρο ή μαύρο χρώμα. Θεωρούμε δύο χρωματισμούς ισοδύναμους αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με κάποια περιστροφή γύρω από το κέντρο του πενταγώνου. Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας χρωματισμών υπάρχουν;

4. (10 μονάδες) Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 στα τετράγωνα μιας 3×3 σκακιέρας (ένας σε κάθε τετράγωνο), έτσι ώστε σε κάθε γραμμή της σκακιέρας οι αριθμοί να φθίνουν προς τα δεξιά και σε κάθε στήλη να φθίνουν προς τα κάτω;

5. Δίνεται η μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_8$ με $w(1) = 7$, $w(2) = 1$, $w(3) = 3$, $w(4) = 8$, $w(5) = 4$, $w(6) = 6$, $w(7) = 5$ και $w(8) = 2$.

(α) (10 μονάδες) Υπολογίστε τα ταμπλώ $P(w)$ και $Q(w)$.

(β) (10 μονάδες) Σωστό ή λάθος; Το πλήθος των μεταθέσεων $u \in \mathfrak{S}_8$ με $P(u) = Q(w)$ ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων $v \in \mathfrak{S}_8$ με $Q(v) = P(w)$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

6. (15 μονάδες) Συμβολίζουμε με $\Gamma(n)$ το σύνολο των ζευγών (λ, μ) , όπου λ και μ είναι διαμερίσεις φυσικών αριθμών (επιτρέποντας την κενή διαμέριση) με $|\lambda| + |\mu| = n$. Υπολογίστε το άθροισμα

$$a(n) = \sum_{(\lambda, \mu) \in \Gamma(n)} (f^{\lambda, \mu})^2,$$

όπου $f^{\lambda,\mu}$ είναι το πλήθος των ζευγών (P, Q) για τα οποία το P είναι ταμπλώ σχήματος λ , το Q είναι ταμπλώ σχήματος μ και καθένα από τα $1, 2, \dots, n$ εμφανίζεται (μία φορά) στο P ή στο Q .

Για παράδειγμα, για $n = 2$, $f^{(2),\emptyset} = f^{(1,1),\emptyset} = f^{\emptyset,(2)} = f^{\emptyset,(1,1)} = 1$ και $f^{(1),(1)} = 2$, οπότε $a(2) = 8$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 21/9/2021 – Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες – Καλή Επιτυχία