

Αλγεβρική Συνδυαστική
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2016

1. Δίνεται τυπική δυναμοσειρά $G(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ και η εξίσωση $y^2 = G(x)$ στο $\mathbb{C}[[x]]$.

- (α) (5 μονάδες) Δείξτε ότι η εξίσωση έχει το πολύ δύο λύσεις $y \in \mathbb{C}[[x]]$.
- (β) (10 μονάδες) Βρείτε όλες τις λύσεις αν $G(x) = \sum_{n \geq 0} 3^n x^n$ και υπολογίστε το συντελεστή του x^5 σε καθεμιά από αυτές.
- (γ) (5 μονάδες) Δείξτε ότι η εξίσωση δεν έχει λύση αν $b_0 = 0$ και $b_1 = 1$.
- (δ) (10 μονάδες) Περιγράψτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη στη $G(x)$ ώστε η εξίσωση να έχει λύση στο $\mathbb{C}[[x]]$.

2. (10 μονάδες) Δίνεται πεπερασμένο, μη κατευθυνόμενο γράφημα G χωρίς παράλληλες ακμές. Αν το G έχει δέκα ακμές, ακριβώς δύο από τις οποίες είναι θηλιές, υπολογίστε το άθροισμα των τετραγώνων των ιδιοτιμών του πίνακα γειτνίασης $A(G)$.

3. Θεωρούμε θετικό ακέραιο n , το σύνολο $X = \{1, 2, \dots, n\}$ και τη συμμετρική ομάδα $G = S_n$ των μεταθέσεων του X . Θέτουμε $g \cdot x = g(x)$ για $g \in G$ και $x \in X$.

- (α) (5 μονάδες) Δείξτε ότι η απεικόνιση $G \times X \rightarrow X$ που στέλνει το ζεύγος $(g, x) \in G \times X$ στο $g \cdot x \in X$ αποτελεί δράση της ομάδας G στο σύνολο X .
- (β) (10 μονάδες) Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{g \in G} \# \text{Fix}(g)$, όπου $\text{Fix}(g) = \{x \in X : g \cdot x = x\}$ για $g \in G$.

4. (10 μονάδες) Χρωματίζουμε κάθε ακμή ενός κανονικού τετραέδρου T με ένα από n χρώματα. Θεωρούμε δύο χρωματισμούς ισοδύναμους αν είτε είναι ίσοι, είτε ο ένας προκύπτει από τον άλλο με στροφή κατά γωνία π γύρω από έναν από τους άξονες συμμετρίας που συνδέουν τα μέσα δύο απέναντι ακμών του T . Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας χρωματισμών υπάρχουν;

5. Έστω a_n το πλήθος των Young ταμπλώ με n τετράγωνα, για $n \geq 1$.

- (α) (5 μονάδες) Υπολογίστε το a_n για $n = 6$.
- (β) (10 μονάδες) Δείξτε ότι $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ για $n \geq 3$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 31/8/2016 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία