

**Αλγεβρική Συνδυαστική**  
**Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2011**

1. Δίνεται η τυπική δυναμοσειρά  $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ , όπου  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 3$  και  $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$  για  $n \geq 2$ .

(α) (5 μονάδες) Υπολογίστε το συντελεστή του  $x^3$  στην  $(F(x))^2$ .

(β) (5 μονάδες) Υπολογίστε το συντελεστή του  $x^3$  στο γινόμενο  $\prod_{i \geq 1} F(x^i)$ .

(γ) (10 μονάδες) Για  $n \in \mathbb{N}$ , υπολογίστε το συντελεστή του  $x^{2n}$  στην  $(1/F(x))^n$ .

2. (10 μονάδες) Υπολογίστε το άθροισμα  $\sum_{w \in \mathcal{S}_n} \text{des}(w)$ , όπου  $\text{des}(w)$  είναι το πλήθος των καθόδων της μετάθεσης  $w \in \mathcal{S}_n$ .

3. Δίνεται η μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_6$  με  $w(1) = 2, w(2) = 3, w(3) = 1, w(4) = 5, w(5) = 6$  και  $w(6) = 4$ .

(α) (10 μονάδες) Υπολογίστε τα ταμπλώ  $P(w)$  και  $Q(w)$ .

(β) (10 μονάδες) Βρείτε όλες τις μεταθέσεις της  $\mathcal{S}_6$  οι οποίες είναι ισοδύναμες κατά Knuth με τη  $w$ .

(γ) (5 μονάδες) Βρείτε λοξό Young ταμπλώ σχήματος  $(4, 4)/(2)$  το οποίο να είναι ισοδύναμο με το  $P(w)$ .

(δ) (5 μονάδες) Βρείτε όλα τα λοξά Young ταμπλώ σχήματος  $(4, 4, 3, 1)/(3, 2, 1)$  τα οποία είναι ισοδύναμα με το  $P(w)$ .

4. Δίνεται μη κατευθυνόμενο απλό γράφημα  $G$  στο σύνολο κορυφών  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  με ακμές  $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_1, v_6\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_5\}$  και  $\{v_3, v_6\}$ .

(α) (5 μονάδες) Πόσα παράγοντα υπογραφήματα έχει το  $G$ ;

(β) (5 μονάδες) Ποιος είναι ο πίνακας Laplace του  $G$  (ως προς τη δοσμένη αρίθμηση κορυφών);

(γ) (10 μονάδες) Υπολογίστε το πλήθος των παραγόντων δένδρων του  $G$ .

**Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.**

Αθήνα 3/11/2011 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία