

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Θέματα Σεπτεμβρίου 2008

1. Ποια από τα παρακάτω άπειρα αθροίσματα είναι αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{C}[[x]]$;

$$(\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \quad (\beta) \sum_{k=1}^{\infty} (x + x^2)^k \quad (\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} (1 + x + x^2)^k.$$

2. Για τυχαίο μη αρνητικό ακέραιο n , συμβολίζουμε με a_n το πλήθος των διαμερίσεων του n με διακεκριμένα μέρη, καθένα από τα οποία είναι μικρότερο του 101 (όπου $a_0 = 1$ κατά σύμβαση) και θεωρούμε την τυπική δυναμοσειρά $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(α) Δείξτε ότι $F(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{100})$.

(β) Δείξτε ότι η τυπική δυναμοσειρά $F(-x)$ είναι αντιστρέψιμη στο $\mathbb{C}[[x]]$ και ότι η $F(x)/F(-x)$ έχει μη αρνητικούς ακέραιους συντελεστές.

3. Για πόσες μεταθέσεις $w \in \mathcal{S}_5$ ισχύει $\text{maj}(w) = 5$ (όπου $\text{maj}(w)$ είναι ο πρωτεύων δείκτης της w);

4. Για ποιες μεταθέσεις $w \in \mathcal{S}_9$ ισχύει $P(w) = \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 5 & 8 & \\ 3 & 6 & & \end{array}$ και $Q(w) = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & \\ 8 & 9 & & \end{array}$;

5. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τους ακεραίους $1, 2, \dots, 12$ στα τετράγωνα μιας 3×4 ορθογώνιας σκακιέρας (έναν ακέραιο σε κάθε τετράγωνο), ώστε σε κάθε γραμμή της σκακιέρας οι ακέραιοι να φθίνουν προς τα δεξιά και σε κάθε στήλη να φθίνουν προς τα κάτω;

6. Έστω G το μη κατευθυνόμενο γράφημα στο σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ στο οποίο οποιεσδήποτε δύο διακεκριμένες κορυφές v_i και v_j εκτός των v_1 και v_2 συνδέονται με ακμή (ώστε το G έχει συνολικά 5 κορυφές και 9 ακμές).

(α) Ποιος είναι ο πίνακας Laplace (ως προς τη δοσμένη αρίθμηση των κορυφών) του G ;

(β) Υπολογίστε το πλήθος των παραγόντων δένδρων του G .

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 19/9/2008 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία