

Αλγεβρική Συνδυαστική
Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2026

1. Για $\alpha \in \mathbb{C}$ θέτουμε

$$\exp(\alpha x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n x^n}{n!} \in \mathbb{C}[[x]]$$

(όπου $\alpha^0 := 1$).

(α) (10 μονάδες) Δείξτε ότι η $\exp(\alpha x)$ είναι αντιστρέψιμη στο $\mathbb{C}[[x]]$ και ότι η αντίστροφή της είναι ίση με $\exp(-\alpha x)$.

(β) (5 μονάδες) Σωστό ή λάθος; Αν η $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ είναι αντιστρέψιμη στο $\mathbb{C}[[x]]$ με αντίστροφή την $F(-x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n x^n$ και $a_0 = 1$, τότε $F(x) = \exp(\alpha x)$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{C}$.

2. (10 μονάδες) Σωστό ή λάθος; Αν ο πίνακας γειτονικότητας ενός απλού (πεπερασμένου, μη κατευθυνόμενου) γραφήματος G έχει ιδιοτιμές $4, -1, -1, -1, -1$, τότε το G είναι ισόμορφο με το πλήρες γράφημα K_5 .

3. (15 μονάδες) Χρωματίζουμε κάθε ακμή και κάθε διαγώνιο ενός κανονικού πενταγώνου με άσπρο ή μαύρο χρώμα. Θεωρούμε δύο χρωματισμούς ισοδύναμους αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με κάποια περιστροφή γύρω από το κέντρο του πενταγώνου ή με αντικατοπτρισμό σε κάποιον άξονα συμμετρίας. Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας χρωματισμών υπάρχουν;

4. (15 μονάδες) Έστω $f(n)$ το πλήθος των τρόπων να επιλεγεί μια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ με $w = w^{-1}$ και να χρωματιστεί κάθε κύκλος μήκους 2 της w με άσπρο ή μαύρο χρώμα, όπου $f(0) = 1$. Υπολογίστε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} f(n) x^n / n!$ και βρείτε έναν αναδρομικό τύπο για το $f(n)$.

5. (10 μονάδες) Βρείτε μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_8$ τέτοια ώστε

$$P(w) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 7 \\ \hline 3 & 5 & 8 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline \end{array} \quad Q(w) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & 7 \\ \hline 4 & 8 & \\ \hline \end{array}$$

6. (10 μονάδες) Υπολογίστε το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_8$ που δεν έχουν αύξουσα υποακολουθία με τέσσερις όρους, ούτε φθίνουσα υποακολουθία με τέσσερις όρους.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 22/6/2026 – Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες – Καλή Επιτυχία