

Αλγεβρική Συνδυαστική
Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2016

1. (5 μονάδες) Για τυπικές δυναμοσειρές $F(x), G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ δείξτε ότι $F(x)G(x) = 0$ στο $\mathbb{C}[[x]]$ αν και μόνο αν $F(x) = 0$ ή $G(x) = 0$.

2. Δίνεται η τυπική δυναμοσειρά $F(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^n \in \mathbb{C}[[x]]$.

(α) (10 μονάδες) Υπολογίστε την $F(x)$ ως ρητή συνάρτηση του x και δείξτε ότι οι συντελεστές της ανήκουν στο σύνολο $\{-1, 0, 1\}$.

(β) (5 μονάδες) Υπολογίστε τους συντελεστές των x^{99} και x^{100} στην $F(x)/(1+x)$.

(γ) (5 μονάδες) Υπολογίστε τους συντελεστές των x^{99} και x^{100} στην $1/F(x)$.

3. Έστω γράφημα $G = (N, E, \varphi)$ με σύνολο κορυφών $N = \{1, 2, 3\}$ και σύνολο ακμών $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, όπου $\varphi(e_1) = \{1, 3\}$, $\varphi(e_2) = \{2, 3\}$ και $\varphi(e_3) = \varphi(e_4) = \{1, 2\}$. Έστω $w_G(n)$ το πλήθος των κλειστών περιπάτων μήκους n στο G .

(α) (10 μονάδες) Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A(G)$.

(β) (5 μονάδες) Βρείτε $\alpha \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} w_G(n)/\alpha^n = 1$.

(γ) (5 μονάδες) Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} w_G(n)x^n$ ως ρητή συνάρτηση του x .

4. (10 μονάδες) Χρωματίζουμε τα 25 σημεία του τετραγώνου $T = [-2, 2] \times [-2, 2] \subseteq \mathbb{R}^2$ με αθέρατες συντεταγμένες, το καθένα με ένα από n χρώματα. Θεωρούμε δύο χρωματισμούς ισοδύναμους αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με στροφή γύρω από το κέντρο του T κατά γωνία που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\pi/2$, ή με ορθογώνια ανάκλαση ως προς έναν από τους τέσσερις άξονες συμμετρίας του T . Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας χρωματισμών υπάρχουν;

5. (10 μονάδες) Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{w \in \mathcal{S}_n} \text{exc}(w)$, όπου $\text{exc}(w)$ είναι το πλήθος των ακεραίων $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ με $w(i) > i$ για $w \in \mathcal{S}_n$. Υπόδειξη: Για δοσμένο ακέραιο $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, πόσες μεταθέσεις $w \in \mathcal{S}_n$ υπάρχουν με $w(i) > i$;

6. (15 μονάδες) Βρείτε όλες τις μεταθέσεις $w \in \mathcal{S}_7$ για τις οποίες οι αριθμοί 2, 3, 4 εμφανίζονται στην πρώτη γραμμή του $P(w)$ και οι 5, 6, 7 εμφανίζονται στην πρώτη στήλη του $Q(w)$. Υπόδειξη: Τι σχήμα μπορεί να έχουν τα $P(w)$ και $Q(w)$ για μια τέτοια μετάθεση;

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 17/6/2016 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία