

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Θέματα Ιουνίου 2009

1. Έστω η τυπική δυναμοσειρά $F(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \dots \in \mathbb{C}[[x]]$. Για $n \in \mathbb{N}$, υπολογίστε το συντελεστή του x^n στις τυπικές δυναμοσειρές:

(α) $F'(x)$ (β) $(F(x))^n$ (γ) $1/F(x)$ (δ) $\left(\frac{1}{F(x)}\right)^{2n}$.

2. Έστω η μετάθεση $w \in \mathcal{S}_8$ με $w(1) = 5, w(2) = 1, w(3) = 7, w(4) = 2, w(5) = 8, w(6) = 4, w(7) = 6$ και $w(8) = 3$.

- (α) Υπολογίστε το πλήθος των αντιστροφών $\text{inv}(w)$ της w .
- (β) Υπολογίστε τον πρωτεύοντα δείκτη $\text{maj}(w)$ της w .
- (γ) Είναι η w εναλλάσσουσα;
- (δ) Πόσα στοιχεία της \mathcal{S}_8 έχουν άρτιο πρωτεύοντα δείκτη;
- (ε) Υπολογίστε το P -ταμπλώ και το Q -ταμπλώ της w .
- (στ) Πόσες μεταθέσεις της \mathcal{S}_8 είναι ισοδύναμες κατά Knuth με τη w ;

3. Για πόσες μεταθέσεις $w \in \mathcal{S}_4$ ισχύει $P(w) = Q(w)$;

4. Πόσες ακολουθίες $(\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{10})$ διαμερίσεων ακεραίων υπάρχουν, με τις εξής ιδιότητες:

- (α) $\lambda^0 = \emptyset$,
- (β) $\lambda^{10} = (4, 4, 2)$ και
- (γ) το διάγραμμα Young της λ^i προκύπτει προσθέτοντας ένα τετράγωνο στο διάγραμμα Young της λ^{i-1} , για $1 \leq i \leq 10$;

5. Έστω \mathcal{G} το κατευθυνόμενο γράφημα στο σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ στο οποίο υπάρχει μία ακμή με αρχή v_i και πέρας v_j αν $j - i \equiv 1$ ή $2 \pmod{5}$ (ώστε το \mathcal{G} έχει συνολικά 5 κορυφές και 10 ακμές).

- (α) Ποιος είναι ο πίνακας Laplace (ως προς τη δοσμένη αρίθμηση των κορυφών) του \mathcal{G} ;
- (β) Υπολογίστε το πλήθος των προσανατολισμένων παραγόντων δένδρων του \mathcal{G} με ρίζα το v_5 .
- (γ) Μπορείτε να γενικεύσετε το (β) για το γράφημα \mathcal{G}_n στο σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ στο οποίο υπάρχει μία ακμή με αρχή v_i και πέρας v_j αν $j - i \equiv 1$ ή $2 \pmod{n}$;

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 3/7/2009 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία