ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ
Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2008

1. Ποια από τα παρακάτω άπειρα αθροίσματα ορίζονται στο $\mathbb{C}[[x]]$;

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} (x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots)$ (β) $\sum_{k=1}^{\infty} (1 + x + x^2 + \cdots + x^k)^k$ (γ) $\sum_{k=1}^{\infty} (x + x^2 + \cdots + x^k)^{2k}$.

2. Μια διαμέριση ακεραίου $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ λέγεται *αυτοσυζυγής* αν $\lambda' = \lambda$, δηλαδή αν οι στήλες του διάγραμματος Young της λ έχουν μήκη $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα Young της διαμέρισης $\lambda = (5, 4, 4, 3, 2)$. Είναι η λ αυτοσυζυγής;

(β) Έστω $c(n)$ το πλήθος των αυτοσυζυγών διαμερίσεων του ακεραίου n, όπου $c(0) = 1$ κατά σύμβαση. Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} c(n)\, x^n \;=\; \prod_{i \geq 1} (1 + x^{2i-1}).$$

3. Πόσες μεταθέσεις $w \in \mathcal{S}_7$ έχουν ακριβώς τέσσερις κύκλους στην κυκλική τους αναπαράσταση;

4. Για πόσες μεταθέσεις $w \in \mathcal{S}_9$ ισχύει $Q(w) \;=\; \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & \\ 8 & 9 & & \end{array}$;

5. Δίνεται το λοξό ταμπλώ $T \;=\; \begin{array}{cccccccc} & & & & & & & 8 \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & 3 & & & \\ & & & 7 & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & 6 & & & & & & \\ 4 & & & & & & & \end{array}$.

(α) Βρείτε ένα Young ταμπλώ P το οποίο να είναι ισοδύναμο με το T.

(β) Βρείτε το ταμπλώ εκκένωσης του ταμπλώ P του ερωτήματος (α).

6. Έστω Λ το σύνολο των διαμερίσεων των μη αρνητικών ακεραίων. Για τους γραμμικούς ενδομορφισμούς $U, D : \mathbb{C}\Lambda \to \mathbb{C}\Lambda$ με

$$U(x) \;=\; \sum_{x \to y} y, \qquad D(y) \;=\; \sum_{x \to y} x$$

για $x, y \in \Lambda$, δείξτε ότι ισχύει $DUD^2U = U^2D^3 + 4UD^2 + 2D$.

Πρόβλημα Bonus. Για κάθε θετικό ακέραιο n, δείξτε ότι υπάρχουν μη αρνητικοί ακέραιοι γ_i τέτοιοι ώστε

$$A_n(x)/x \;=\; \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \gamma_i x^i (1 + x)^{n-1-2i},$$

όπου $A_n(x)$ είναι το πολυώνυμο Euler τάξης n.

Αθήνα 18/6/2008 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία